9. osztály

1. Tímár Mihály nehéz helyzetbe került, mert lekopott a kincset rejtő zsákról a vörös félhold. Annyit tud, hogy a négy zsák közül a legnehezebbikben, a búzába rejtve ott van a kincs. Három mérés során az derült ki, hogy az első zsák a másodikkal együtt kisebb, a harmadikkal együtt ugyanakkora, a negyedikkel együtt pedig nagyobb tömegű, mint a másik két zsák. Melyik zsákban van a kincs?

(A) *az elsőben* **(B)** *a másodikban* **(C)** *a harmadikban*
(D) *a negyedikben* **(E)** *nem állapítható meg*

Megoldás: Legyen a négy zsák tömege a feladat szövege szerinti sorrendben: A, B, C, D. A feladat feltétele alapján:

I. $A + B < C + D$, II. $A + C = B + D$, III. $A + D > B + C$.

Az I. és a III. megfelelő oldalait összeadva:

$$C + D + A + D > A + B + B + C, \text{ azaz } D > B.$$

Az I. és a II. összeadásával:

$$A + B + A + C < C + D + B + D, \text{ azaz } A < D.$$

A II. és a III. összeadásával:

$$A + D + B + D > B + C + A + C, \text{ azaz } D > C.$$

Tehát D a legnagyobb tömegű, vagyis a negyedik zsákban van a kincs.

Helyes válasz(ok): D

2. Az alábbiak közül melyik a helyes sorrend az $a = 2^{585}$, $b = 3^{351}$, $c = 4^{117}$, $d = 3^{234}$ számok között?

(A) $a<b<c<d$ **(B)** $d<c<b<a$ **(C)** $c<b<a<d$ **(D)** $c<d<a<b$ **(E)** $c<d<b<a$

Megoldás: Mivel a hatványkitevők tényezőkre bontva:

$$585 = 3^3 \cdot 5 \cdot 13; \quad 351 = 3^3 \cdot 13; \quad 117 = 3^2 \cdot 13; \quad 234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13;$$

a hatványozás azonosságait felhasználva:

$$a = 2^{585} = \left(2^5\right)^{3^2 \cdot 13} = 32^{117},$$

$$b = 3^{351} = \left(3^3\right)^{3^2 \cdot 13} = 27^{117},$$

$$c = 4^{117},$$

$$d = 3^{234} = \left(3^2\right)^{3^2 \cdot 13} = 9^{117}.$$

Mivel az 1-nél nagyobb alapú hatványok között, ahol a kitevő azonos pozitív szám, az a nagyobb, amelyiknek nagyobb az alapja, ezért $c<d<b<a$.

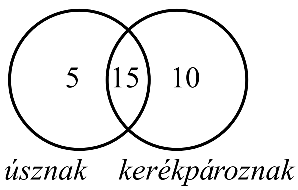
Helyes válasz(ok): E

3. A táborozók közül 25-en tudnak kerékpározni, 20-an úszni, de egyetlen olyan gyerek sincs, aki a két sportág valamelyikéhez ne értene. A táborozók létszámának 6-szorosa olyan szám, amelynek számjegyeit összeadva 3-szor akkora számot kapunk, mint a táborozólétszám számjegyeinek összege. Hány fő lehet a táborozók létszáma?

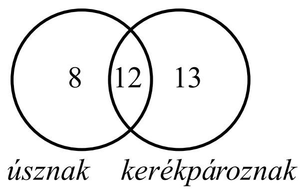
(A) *28-nál kevesebb* **(B)** *28-nál több* **(C)** *32-nél kevesebb*
(D) *32-nél több* **(E)** *34-nél több*

Megoldás: A táborozók legalább 25-en és legfeljebb 45-en vannak. A létszámuk 6-szorosa páros szám és legfeljebb $6 \cdot 45 = 270$. Az 1-től 270-ig lévő páros számok számjegyeinek összege legfeljebb $1+9+8=18$, így a táborozólétszám jegyeinek összege legfeljebb $18:3=6$ lehet. A 25 és 45 között ennek megfelelő számok a 30, 31, 32, 33, 40, 41 és 42. Az összes feltételt ezek közül a 30 és a 33 elégíti ki. A két megfelelő létszámot az alábbi diagramokon is láthatjuk.

30-as létszámnál



33-as létszámnál



Helyes válasz(ok): B, C, D

4. Hány *cm* lehet a legrövidebb oldala egy olyan derékszögű háromszögnek, amelynek oldalai centiméterben mérve egész számok, és az átfogó 6 centiméterrel rövidebb, mint a két befogó összege?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás: Legyen $a \le b < c$. Tudjuk, hogy

$$a+b=c+6 \text{, ahonnan } c=a+b-6.$$

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $a^2+b^2=c^2$, majd ebbe helyettesítsük be a c-re fent kapott kifejezést:

$$a^2+b^2=(a+b-6)^2.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$0=18+ab-6a-6b=18+(a-6)(b-6)-36.$$

Ebből pedig

$$18=(a-6)(b-6).$$

Ekkor $(a-6;b-6)$ lehetséges értékei: (-18;-1), (-9;-2), (-6;-3), (1;18), (2;9), és (3;6). Az első három esetben a értéke nem lenne pozitív. A többi esetben a következő értékeket kapjuk $(a;b;c)$-re:

(7;24;25), (8;15;17) és (9;12;15).

Helyes válasz(ok): C, D, E

5. Anna észrevette, hogy a táblára írt három szám olyan, hogy ha a náluknál 1-gyel nagyobbakat összeszorozza, az megegyezik a szorzatuknál 1-gyel nagyobb számmal. Bea azt vette észre ugyanezekről a számokról, hogy ha a náluknál 2-vel nagyobbakat összeszorozza, az megegyezik a szorzatuknál 2-vel nagyobb számmal. Ha ugyanezen számoknál 3-mal nagyobbakat szorozzuk össze, az hánnyal lesz nagyobb a szorzatuknál?

(A) *1-gyel* **(B)** *2-vel* **(C)** *3-mal* **(D)** *6-tal* **(E)** *9-cel*

Megoldás: Legyen a táblára írt három szám *x*, *y* és *z*. Ekkor

$$(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+1$$

$$(x+2)(y+2)(z+2)=xyz+2$$

ahonnan, felbontva a zárójeleket és rendezve azt kapjuk, hogy

$$x+y+z+xy+yz+zx=0$$

$$4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)=-6$$

Bevezetve az $a=x+y+z$ és $b=xy+yz+zx$ jelöléseket, azt kapjuk, hogy $a+b=0$ és $4a+2b=-6$, ahonnan $a=-3$ és $b=3$ és így

$$(x+3)(y+3)(z+3)-xyz=9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)+27=$$

$$=9a+3b+27=9$$

Tehát

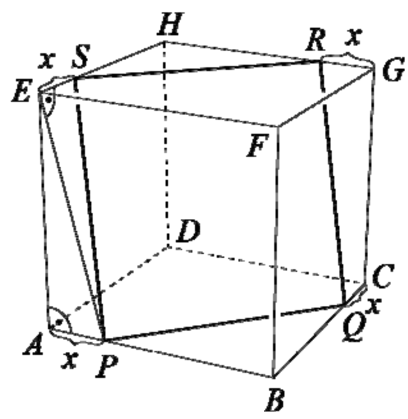
$$(x+3)(y+3)(z+3)=xyz+9\,.$$

A feltételeknek megfelelő számok léteznek is, például $x=y=z=-1$.

Helyes válasz(ok): E

6. Az 1 *m* élű kockába bele lehet tenni egy olyan négyzetet, melynek méretei méterben…

(A) *1,01×1,01* **(B)** *1,02×1,02* **(C)** *1,03×1,03* **(D)** *1,04×1,04* **(E)** *1,05×1,05*



Megoldás: Megmutatjuk, hogy 1,05×1,05-ös négyzet még belefér a kockába. Jelöljük az egységkocka csúcsait az ábrán látható módon. Rögzítsünk egy $0<x<1$ távolságot, és vegyük fel az *AB*, *BC*, *GH* és *HE* éleken azokat a *P*, *Q*, *R* és *S* pontokat, amelyekre $AP=CQ=GR=ES=x$. Ekkor a kocka szimmetriája miatt $PQ=RS$ és mindkét szakaszt merőlegesen felezi a *BDHF* sík, tehát a *PQRS* négyszög téglalap. Pithagorász tétele segítségével az *x* függvényében könnyen megadhatjuk a téglalap oldalainak hosszát. A *PBQ* és az *EAP* háromszögek nyilván derékszögűek, ezért

$PQ^2=PB^2+BQ^2=2(1-x)^2$ és

$PE^2 = AE^2 + AP^2 = 1 + x^2$. A kocka HE éle merőleges az $ABFE$ lapra, ezért $PES\sphericalangle = 90°$, tehát
$PS^2 = PE^2 + ES^2 = 1 + 2x^2$.
Ha tehát x-et növeljük, akkor PQ csökken, PS pedig nő. Egy téglalapba írható legnagyobb négyzet oldalának hossza megegyezik a téglalap nem hosszabb oldalának hosszával. Ezért a $PQRS$ téglalapba írható négyzet akkor lesz a legnagyobb, ha $PQ = PS$ teljesül. Ekkor

$$2(1-x)^2 = 1 + 2x^2 \text{, azaz } x = \frac{1}{4}.$$

Ebben az esetben $PQ = PS = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}06 > 1{,}05$.

Tehát ha a P, Q, R és S pontokat a megfelelő élek negyedelőpontjainak választjuk, akkor a kocka és a $PQRS$ sík metszetében elfér egy $1{,}05\times1{,}05$-ös négyzet és így ennél kisebb négyzet is.

Megjegyzés: Megmutatható, hogy a megoldásban konstruált $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ oldalú négyzetnél nagyobb négyzet már nem fér el az egységkockában. Ennek belátása azonban jóval nehezebb feladat, mint magának a négyzetnek a megtalálása.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

7. Egy társasjátékban van 11 piros, 7 kék és 20 zöld korongunk. A bank egy piros meg egy kék korongért két zöld korongot ad, egy piros meg egy zöld korongért két kék korongot, és egy kék meg egy zöld korongért két piros korongot ad. A cserék során arra törekszünk, hogy csupa azonos színű korongunk legyen. Melyik színnel lehet elérni, hogy a végén az összes korong olyan színű legyen?

(A) *pirossal* **(B)** *kékkel* **(C)** *zölddel*
(D) *bármelyikkel elérhető* **(E)** *egyik színnel sem érhető el.*

Megoldás: Figyeljük meg, hogy bármelyik két színt változtatjuk, a korongok számának különbségeit összeadva, az összeg 3-mal osztva mindig ugyanannyi maradékot ad. Például:

	p	*k*	*z*	|*p-k*|	|*k-z*|	|*z-p*|	különbségek összege	maradék 3-al osztva
kezdetben	11	7	20	4	13	9	26	2
$1p + 1k = 2z$	10	6	22	4	16	12	32	2
$1z + 1p = 2k$	9	8	21	1	13	12	26	2
$1k + 1z = 2p$	11	7	20	4	13	9	26	2

Ez nyilván mindig igaz, hiszen, ha két színből elveszünk 1-1-et, akkor a különbségük nem változik, ha viszont az egyik színből 1-et veszünk el, valamelyik másik színű korong száma 2-vel nő, így ezek különbsége 3-mal változik.

Összesen 38 korongunk van, aminek 3-mal való osztási maradéka 2. Így az a szín nem maradhat a végén, amelyikhez létezik egy másik szín úgy, hogy a korongok számának különbsége 3 többszöröse. A golyók számának különbségei: $20z-11p=9$, $20z-7k=13$, $11p-7k=4$. Azaz sem piros, sem zöld korong nem maradhat a végén, csak kék.
A csupa kék korong valóban elérhető az alábbi módon: $11p$, $7k$, $20z$. Elveszünk 3 kék és 3 zöld korongot, lesz $17p$, $4k$ és $17z$ korongunk. Majd $17p$ és $17z$ korongot váltunk be 34 kékre, és lesz 38 kék, 0 zöld és 0 piros korongunk.

Helyes válasz(ok): B

8. Egy kör alakú városfalon 12 őrbódé, az óramutató járásával egyező irányban 1-től 12-ig növekvő sorrendben van számozva és mindegyik előtt az őrbódéval azonos számozású őr áll. Délben mindegyikük elindul az őrhelyéről a falon valamelyik irányba olyan sebességgel, amellyel egy óra alatt kerülné meg a várost. Ha két őr szembetalálkozik, akkor sarkon fordulnak és változatlan sebességgel haladnak tovább az ellenkező irányba. Melyik őrbódé előtt állhat a 6-os számú katona éjfélkor?

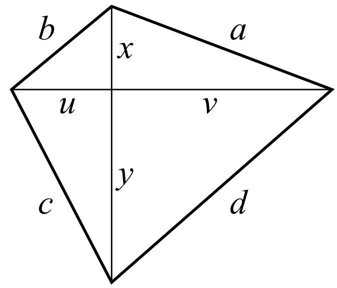
(A) *2* **(B)** *4* **(C)** *6* **(D)** *10* **(E)** *12*

Megoldás: Képzeljük el, hogy mindegyik őrnél van egy fáklya, és valahányszor két őr találkozik, mielőtt sarkon fordulnának kicserélik a náluk lévő fáklyákat.
Ha csak a fáklyákat figyeljük, azt látjuk, hogy mindegyik fáklya pontosan egy óra alatt megkerüli a várost, hiszen a fáklyák sebessége megegyezik az őrök sebességével és a fáklyák mindegyike mindig a kezdeti körüljárási irányában halad. Ez azt jelenti, hogy egy óra elteltével mindegyik őrhelyen lesz egy fáklya, tehát szükségképpen egy őr is. Elképzelhető, hogy az egyes őrök nem az eredeti helyükön lesznek, az azonban biztos, hogy ugyanolyan sorrendben követik egymást a várfalon, mint ahogy eredetileg elhelyezkedtek egymáshoz képest. Vagyis egy óra elteltével az lesz a helyzet, hogy valamilyen körüljárási irányt rögzítve, minden egyes őr ugyanannyi, mondjuk k őrhellyel arrébb kerül a várfalon a rögzített körüljárási irány szerint.
Ezután minden egyes fáklya ugyanabban a körüljárási irányban folytatja vándorlását, mint ahogy megkezdte, ezért újabb óra elteltével a fáklyák ismét eredeti helyükön lesznek, az őrök pedig ismét k hellyel kerülnek arrébb a városfalon. Mindez 12-szer egymás után megismétlődik, ezért éjfélig minden őr összesen $12k$ hellyel mozdul el, azaz k-szor körbejárva a várost visszakerül eredeti helyére.

Helyes válasz(ok): C

9. Egy konvex négyszög három oldalának hossza 1 *cm*, 4 *cm* és 8 *cm*, átlói pedig merőlegesek egymásra. Hány centiméter lehet a negyedik oldal hossza?

(A) $\sqrt{29}$ **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** $\sqrt{67}$ **(E)** $\sqrt{79}$



Megoldás: Jelöljük a négyszög oldalait a, b, c és d-vel, az átlók metszéspontja által meghatározott szakaszokat x, y, u és v-vel, az alábbi ábra szerint.
A kapott derékszögű háromszögek oldalaira írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$x^2 + v^3 = a^2$, $y^2 + u^3 = c^2$,

$x^2 + u^3 = b^2$, $y^2 + v^3 = d^2$.

Az első két egyenletből:

$$v^2 - u^2 = a^2 - b^2,$$

a másik kettőből:

$$v^2 - u^2 = d^2 - c^2.$$

A bal oldalak egyenlőségéből következik a jobb oldalak egyenlősége, azaz

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2.$$

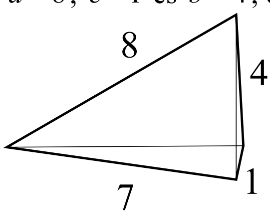
Innen

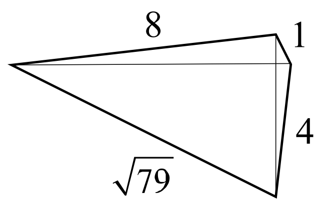
$$d^2 = a^2 + c^2 - b^2.$$

Úgy kell tehát megválasztanunk az adott oldalakat, hogy $d^2 > 0$ legyen.
Ez két esetben teljesül:

ha $a = 8$, $c = 4$ és $b = 1$, ekkor $d = \sqrt{64 + 16 - 1} = \sqrt{79}$ *cm*;

vagy $a = 8$, $c = 1$ és $b = 4$, ekkor $d = \sqrt{64 + 1 - 16} = 7$ cm.





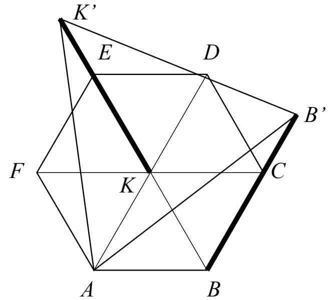
(Ellenőrizhető, hogy léteznek ilyen négyszögek)

Helyes válasz(ok): C, E

10. Az *ABCDEF* szabályos hatszög *K* középpontjában, továbbá a *B* csúcsában egy-egy légy, az *A* csúcsban pedig egy pók ül. A *B* csúcsból a *C* irányába, a *K*-ból pedig az *E* irányába egyszerre, azonos sebességgel elindulnak a legyek. Ekkor a mozgás során a két légy a helyben maradó pókkal együtt mindig egy olyan háromszög csúcsaiban vannak, amelyik…

(A) *derékszögű.* **(B)** *nem derékszögű.* **(C)** *egyenlőszárú.*

(D) *nem egyenlőszárú.* **(E)** *szabályos.*



Megoldás: Mivel a legyek azonos sebességgel haladnak, azonos idő alatt egyenlő utat tesznek meg. Ez azt jelenti, hogy ha egy időpontban a B', illetve K' pontban vannak, akkor $BB' = KK'$.
Így $ABB'\Delta \cong AKK'\Delta$. $ABB'\sphericalangle = 120°$, $AKK' = 120°$, és az $ABCDEF$ szabályos hatszög hat szabályos háromszögre bontható, ezért $AB = AK$ is teljesül. A két háromszögnek két oldala és az általuk bezárt szöge is megegyezik, tehát valóban egybevágók. Ezért a harmadik oldaluk is egyenlő: $AK' = AB'$.
Másrészt, mivel $KAB\sphericalangle = 60°$, azért az A körüli 60°-os forgatással az ABB' háromszög az AKK' háromszögbe mozgatható. Ekkor az AB' oldal az AK' oldalba kerül, így $K'AB'\sphericalangle = 60°$. Az $AB'K'$ háromszögnek tehát két egyenlő oldala 60°-os szöget zár be, ezért ez a háromszög szabályos.

Helyes válasz(ok): B, C, E

11. Egy kilenctagú választó testület három jelölt közül választ. Mindegyikük rangsorolja őket, az elsőnek 3, a másodiknak 2, a harmadiknak pedig 1 pontot ad. Összesítve a jelöltek pontszámát kiderült, hogy a sorrend egyértelmű, hármuk pontszáma különböző. A testület egyik tagja észrevette, hogy ha a választást úgy bonyolították volna le, hogy mind a kilencen csak egy jelöltet választanak ki és annak adnak 1 pontot, akkor a jelöltek sorrendje megfordulna. Összesen hány pontot kaphatott eredetileg valamelyik jelölt?

(A) *15* **(B)** *17* **(C)** *19* **(D)** *21* **(E)** *23*

Megoldás: Legyenek a jelöltek az első szavazás eredményének sorrendjében *A*, *B* és *C*. A kiosztott pontok száma összesen $9 \cdot (3+2+1) = 54$.

Ha a második szavazáskor a sorrend megfordult, az azt jelenti, hogy *C*, aki az első szavazáskor vesztes volt, most első lesz. Ez csak úgy lehetséges, ha az első esetben *C* legalább 4 szavazótól kapott 3 pontot, *C* pontjainak száma legkevesebb $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 17$. *C* nem kaphatott 5 szavazónál első helyezést, mert akkor a biztosan kapott 15 pontja mellett lenne még legalább $4 \cdot 1$ pontja, azaz összesen legalább 19 pontja lenne; de akkor az első szavazáskor nem lehetett utolsó, hiszen 19 több, mint a jelöltek pontszámának átlaga, ami 18. Mivel az első választás egyértelmű sorrendet eredményezett, 18 sem lehet *C* pontszáma. Így *C*-nek éppen 17 pontja van, ekkor a győztes *A* 19, *B* pedig 18 pontot kapott.
Az alábbi táblázatban bemutatjuk, hogy ez valóban lehetséges is. *C* négy első helyezése mellett *B* kapjon három, *A* pedig két első helyezést. A táblázat többi értéke a feltételekből már egyértelműen meghatározható.

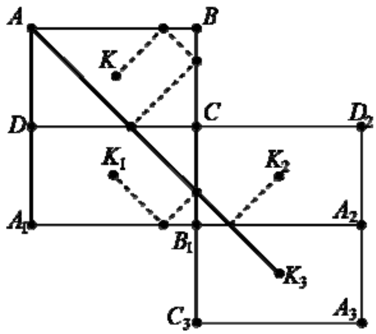
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	pontszám
C	3	3	3	3	1	1	1	1	1	**17**
B	1	2	1	1	3	3	3	2	2	**18**
A	2	1	2	2	2	2	2	3	3	**19**

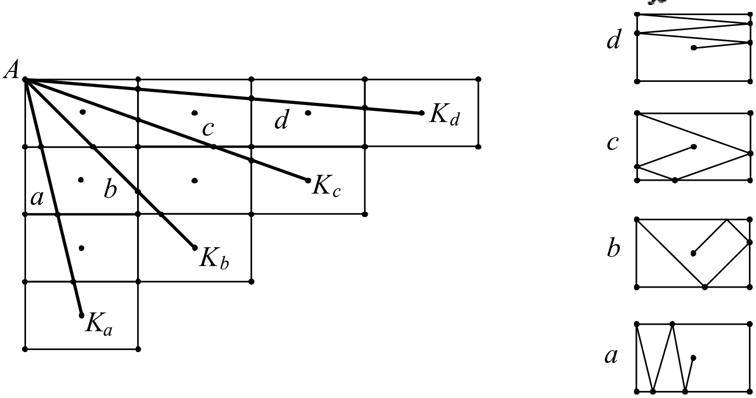
Helyes válasz(ok): B, C

12. Egy téglalap alakú $ABCD$ ($AB \neq BC$) biliárdasztal A csúcsából úgy szeretnénk ellökni egy golyót, hogy az az oldalakról pontosan háromszor visszapattanva éppen telibe találja a téglalap közepén álló golyót. Összesen hány különböző irányba indítható így a golyó az A csúcsból?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Megoldás: A biliárdasztalt szemléltető ABCD téglalapot többször egymásután tükrözzük, mindig arra az oldalára, ahol az ütközés történik. Mivel az ütközésnél a beesés és a visszaverődés szöge egyenlő, így a golyó útja kiegyenesíthető.
A golyó háromszor ütközik az oldalakon, így 4 asztalon kell végighaladnia a kiegyenesített úton az ütközésig.





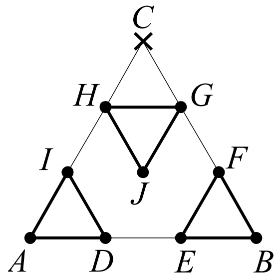
Tehát legfeljebb 4 különböző irányba indítható a golyó.

Helyes válasz(ok): E

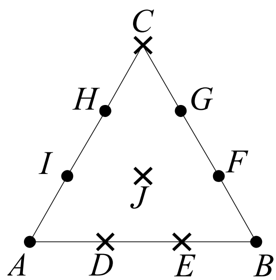
13. Egy szabályos háromszögnek kiválasztottuk a csúcsait, a középpontját és az oldalainak harmadolópontjait. Hány pontot tarthatott meg e 10 pont közül Árpi, ha ezekből már semelyik három nem alkotott szabályos háromszöget?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Jelöljük a pontokat a jobbra lévő ábrán látható módon A, B, ... , J-vel. Mivel maga az ABC háromszög szabályos, legalább az egyik csúcsát el kell hagyni.



A csúcsok szimmetrikus szerepe miatt feltehető, hogy Árpi a C csúcsot hagyta el. Ha más pontot nem hagyna el, akkor a megmaradó pontok három olyan szabályos háromszöget alkotnának, melyeknek nincs közös csúcsuk ($ADI\Delta$, $EBF\Delta$ és $HJG\Delta$). Tehát e háromszögek közül mindegyiknek legalább egy csúcsát el kell hagyni ahhoz, hogy a feltételeknek megfelelő ponthalmazt kapjon. Vagyis legalább $1+3=4$ pontot el kell hagynia, azaz legfeljebb $10-4=6$ pontot tarthat meg.



Megmutatjuk, hogy ezt meg is tudja tenni. Hagyja el a C, D, E és J pontokat. Ekkor a maradék hat pont közül három-három kollineáris (lásd a baloldali ábrán). Ha közülük valamelyik három szabályos háromszöget alkotna, akkor annak két csúcsáról (ismét a pontok szimmetrikus szerepe miatt) feltehetnénk, hogy az $\{A, I, H\}$ ponthalmazba tartozik. Viszont, ha egy szabályos háromszög egyik oldala AI, AH vagy IH, akkor harmadik csúcsa a vizsgált pontok közül rendre csak D, E, illetve J lehetne, de ezeket a pontokat mind elhagyta.

Tehát legfeljebb hat pontot tarthat meg a tízből úgy, hogy közülük semelyik három ne alkosson szabályos háromszöget.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D

10. osztály

1. Összeadtunk néhány egymást követő egész számot. Összegül 11-et kaptunk. Melyik szám szerepelhetett az alábbiak közül az összeadandók között?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *5* **(D)** *7* **(E)** *9*

Megoldás: Egy Egész számokról lévén szó, a negatív egész számokat is figyelembe vehetjük. Ahhoz, hogy szomszédos egész számok összegéül 11-et kapjunk, az összeadás a következő is lehetett:

$$(-10) + (-9) + (-8) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 + 11 = 11$$

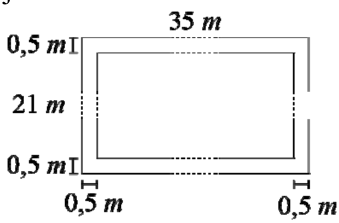
Ezen összeadandók között megtalálható az 1, 3, 5, 7 és 9 is.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

2. A Hupikék Törpikék 1001×945 méteres erdejében 1280 darab 1 méter átmérőjű fenyőfa él. A törpök szeretnének 20×34 méteres teniszpályákat kijelölni az erdőben, anélkül, hogy egyetlen fenyőt is ki kellene vágniuk. A fák bármilyen elhelyezkedése esetén, az alábbiakból hány teniszpálya jelölhető így ki biztosan?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Megmutatjuk, hogy 7 teniszpálya is kijelölhető.



Az erdőben kijelölünk teniszpálya nagyságú területeket úgy, hogy bármelyik fa ezek közül csak egynek a megvalósítását teheti lehetetlenné. Az erdőt lefedjük 21 *m* × 35 *m* nagyságú, fél méter széles peremű téglalapokkal. Ezeken belül legyenek a teniszpályák.
Két szomszédos ilyen terület pereme együtt 1 *m* széles, így ha az egyiknek a belsejébe benyúlik egy fa, az a másik téglalap belső területét (a lehetséges teniszpálya helyét) nem zavarja.
Az erdő egyik 1001 *m* hosszúságú oldalát osszuk fel egy 21 *m*-es és egy 980 *m*-es szakaszra. Az osztóponton át húzzunk párhuzamost a másik oldallal. Így egy 21 *m* × 945 *m*-es sávhoz jutunk, amit pontosan 27 darab 21 *m* × 35 *m*-es téglalapra bonthatunk fel; és egy 980 *m* × 945 *m*-es téglalaphoz, amelynek 980 *m*-es oldalára 28-szor mérhető fel a 35 *m*, 945 *m*-es oldalára pedig 45-ször mérhető fel a 21 *m*. Az utóbbi esetben tehát $45 \cdot 28 = 1260$ darab 21 *m* × 35 *m*-es téglalap és ezen belül összesen ugyanígy 1260 darab teniszpálya jelölhető ki. Az egész erdőben tehát 1287 darab teniszpályát jelöltünk ki úgy, hogy bármelyik fa ezek közül legfeljebb 1-nek a megvalósítását teszi lehetetlenné. Mivel a fák száma 1280, legalább 7 darab teniszpálya biztosan kijelölhető.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

3. Ági meghatározta azt a legkisebb n természetes számot, amelyre $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ maradék nélkül osztható 1000-rel. Az alábbiak közül melyik számjegy található meg ebben az n számban?

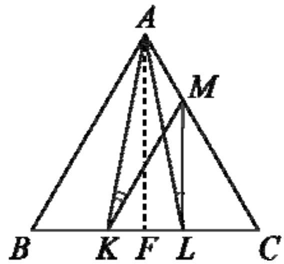
(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: Négy egymást követő természetes szám közül kettő mindig páros, és közülük egyik 2-nek, a másik pedig 4-nek többszöröse, így a szorzat minden n természetes szám esetén többszöröse 8-nak. Mivel $1000 = 8 \cdot 125 = 2^3 \cdot 5^3$, így az adott szorzat akkor lesz maradék nélkül osztható 1000-rel, ha többszöröse 125-nek, vagyis 5^3-nak. Mivel négy egymást követő szám közül legfeljebb egy lehet osztható 5-tel, így akkor kapjuk a legkisebb megfelelő n értéket, ha $n+4=125$, vagyis $n=121$. Tehát a keresett számjegyek az 1 és a 2.

Helyes válasz(ok): B, C

4. Az ABC szabályos háromszögben K és L a BC oldal olyan pontjai, melyekre $BK = KL = LC$ és M az AC oldal olyan pontja, amelyre $2AM = MC$. Hány fok lehet az $AKM\sphericalangle + ALM\sphericalangle$ összeg?

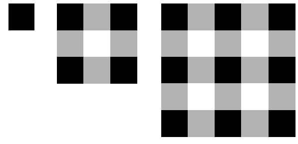
(A) *15°* **(B)** *30°* **(C)** *45°* **(D)** *60°* **(E)** *75°*



Megoldás: Mivel $AM = BK$ (mindkettő egyharmada a szabályos háromszög egyforma oldalainak), ezért KM párhuzamos AB-vel és így $AKM\sphericalangle = BAK\sphericalangle$. Ugyanakkor KMC háromszög is szabályos, így benne ML súlyvonal egyben magasság is. Ha F felezőpontja BC-nek, akkor AF merőleges BC-re, így AF párhuzamos ML-lel, és ebből következik, hogy $ALM\sphericalangle = LAF\sphericalangle$. Csakhogy AF az AKL egyenlőszárú háromszögben is magasság, így ott szögfelező is, tehát $KAF\sphericalangle = LAF\sphericalangle$ és így $KAF\sphericalangle = ALM\sphericalangle$. Mindebből adódik, hogy $AKM\sphericalangle + ALM\sphericalangle = BAF\sphericalangle = 60° : 2 = 30°$.

Helyes válasz(ok): B

5. Az ábrasorozat mintája fekete, fehér és szürke négyzetekből áll. A sorok felváltva:
fekete-szürke-fekete-szürke-…-fekete, aztán
szürke-fehér-szürke-fehér-…-szürke és így tovább az utolsó sorig, ami azonos az első sorral. Az alábbiak közül összesen hány szürke négyzet lehet a sorozat valamelyik ábráján, ha az adott szabály szerint folytatnánk a rajzolást?



(A) *1848* **(B)** *1860* **(C)** *1956* **(D)** *1984* **(E)** *2022*

Megoldás: Az ábrák sorszámát n-nel jelöljük. Az ábrák felépítéséből leolvasható, hogy az összes kis négyzet száma $(2n-1)^2$, mivel a kis négyzetek száma minden sorban és minden oszlopban 2-vel nő az előzőekhez képest.

Az összes fekete négyzet száma az n-edik ábrán n^2. A fehér négyzetek száma rendre 0, 1, 4, ..., az n-edik ábrán tehát $(n-1)^2$ db fehér négyzet van.

Az n-edik ábrán látható szürke négyzetek számát úgy kapjuk meg, ha az ábrán látható kis négyzetek számából levonjuk a fekete, illetve a fehér négyzetek számát. Az n-edik ábrán tehát $(2n-1)^2 - n^2 - (n-1)^2 = 2n(n-1)$ db szürke négyzet van.

Megfigyelhető, hogy n növekedésével a $2n(n-1)$ szorzat is növekszik. Módszeres próbálkozással azt kapjuk, hogy ha

$n = 30$, akkor $2n(n-1) = 1740$;

$n = 31$, akkor $2n(n-1) = 1860$;

$n = 32$, akkor $2n(n-1) = 1984$;

$n = 33$, akkor $2n(n-1) = 2112$.

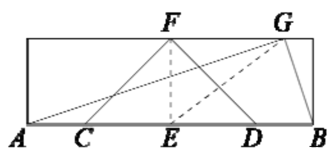
Így a szürke négyzetek száma a 31. ábrán 1860, a 32. ábrán pedig 1984, viszont egyik ábrán sem lesz 1848, 1956 vagy 2022.

(Célt érhetünk úgy is, hogy rendre megoldjuk a $2n(n-1) = 1848$, $2n(n-1) = 1860$, $2n(n-1) = 1956$, $2n(n-1) = 1984$ és $2n(n-1) = 2022$ másodfokú egyenleteket.)

Helyes válasz(ok): B, D

6. Egy 10 *m* hosszú, téglalap alakú tanterem mennyezetén két olyan lámpát helyeztünk el, amelyek kúp alakú, 90°-os nyílásszögű fénynyalábot bocsátanak ki. Az egyik lámpa a mennyezet közepén található, és a padlón egy 6 *m* átmérőjű kört világít meg. A másik lámpa búráját elfordították úgy, hogy az általa megvilágított részen a terem hosszanti irányában elfér egy 10 *m*-es szakasz, de a két szemközti falra már nem esik fény (a másik két szemközti falra esik fény). Hány méter messze van a két lámpa egymástól, ha azok a mennyezet hosszabbik oldalával párhuzamos szimmetriatengelyén találhatók?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*



Megoldás: Az AGB háromszögben az AB oldallal szemközti szög, $AGB\sphericalangle = 90°$, így Thalész tétele szerint $AE = EB = EG = \frac{10}{2} = 5\ m$.

Tudjuk, hogy $CE = ED = 3\ m$. Mivel a CFD háromszögben CD-vel szemben 90°-os szög található, azért szintén a Thalész-tétel miatt $EF = 3\ m$.

Végül az EFG háromszögre Pithágorász tételét felírva kapjuk, hogy $FG^2 = EG^2 - FE^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, ahonnan $FG = 4\ m$.

Helyes válasz(ok): C

7. Két munkás A és B valamely rájuk bízott munkát a következőképpen végzett el. Először csak A dolgozott 2/3 annyi ideig, mint amennyi idő alatt B egyedül elvégezné az egész munkát. Azután B felváltotta A-t és befejezte a munkát. Így a munka 2 órával több időt vett igénybe, mintha együtt fogtak volna hozzá és együttesen végezték volna el. Ha együtt dolgoztak volna az utóbbi módon, akkor A fele annyi munkát végzett volna, mint amennyit ténylegesen B-re hagyott. Hány óra alatt végezné el A vagy B egyedül a munkát? (A és B munkavégzését egyenletesnek tekintjük.)

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *8*

Megoldás: Jelöljön a annyi órát, ami alatt A el tudja végezni a munkát és b, amennyi óra alatt B tudja elvégezni a munkát. Ekkor 1 óra alatt A a munka $\frac{1}{a}$ és B a munka $\frac{1}{b}$ részét végzi el, míg együtt dolgozva $\frac{ab}{a+b}$ óra alatt tudnak végezni és együtt egy óra alatt a munka $\frac{a+b}{ab}$ részét végzik el.

Így viszont, ha együtt dolgoznak, akkor A a munkának az $\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{1}{a}=\frac{b}{a+b}$ részét végzi el.

Az adatok értelmében A $\frac{2b}{3}$ óráig, B pedig $\frac{ab}{a+b}+2-\frac{2b}{3}$ óráig dolgozott. Így az elvégzett munka:

$$\frac{2b}{3a}+\left(\frac{ab}{a+b}+2-\frac{2b}{3}\right)\cdot\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow \frac{2b}{3a}+\frac{a}{a+b}+\frac{2}{b}=\frac{5}{3}. \qquad (*)$$

Másrészt a B-re maradt munka $1-\frac{2b}{3a}$, ami a kétszerese az A által végzett munkának, ha együtt dolgoznak. Így

$$1-\frac{2b}{3a}=2\cdot\frac{b}{a+b}.$$

Rendezve ez utóbbi egyenletet, kapjuk

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}-2=0$$

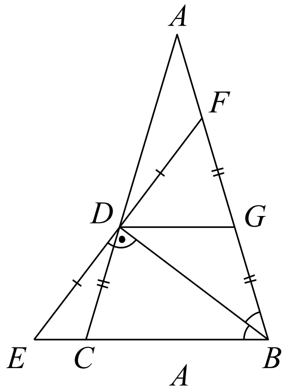
amit $\frac{a}{b}$-ben másodfokú egyenletként megoldva azt kapjuk, hogy $\frac{a}{b}=2$ vagy $\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$. Mivel ezekből csak az első gyök lehetséges (a és b is pozitív), így $a=2b$.

Ezt visszahelyettesítve (*) egyenlőségbe, megkapjuk, hogy $b=3$ és $a=6$. Tehát *A* 6 óra alatt és *B* 3 óra alatt végezné el egyedül a munkát, és ez valóban megoldása a feladatnak.

Helyes válasz(ok): B, D

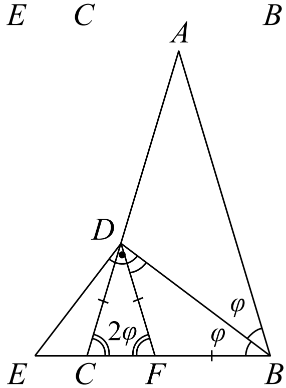
8. Az *ABC* háromszögben $AB=AC$ és *D* az *AC*-nek olyan pontja, melyre *BD* a háromszög szögfelezője. *BC* meghosszabbításán (*C*-n túl) vegyük fel az *E* pontot úgy, hogy $EDB\sphericalangle$ derékszög legyen. Ha $CD=1$ *cm*, hány *cm* lehet *BE*?

(A) *1,2* **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** *1,5* **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** *2*



1. megoldás: *D*-n keresztül húzzunk párhuzamost *BC*-vel és legyen *AB*-vel való metszéspontja *G*. Ekkor $BG=DC=1$ cm. *ED* meghosszabbításának *AB*-vel való metszéspontja legyen *F*. Mivel az *EFB* háromszögnek *BD* magassága és egyben szögfelezője is, ezért $ED=DF$ és $EB=FB$. AZ *EFB* háromszögben *D* felezőpontja *EF*-nek, így *DG* az *EFB* háromszög középvonala, ezért *G* felezi *FB*-t. Így $FB=2\cdot GB=2$ *cm*. Így $EB=2$ *cm*.

2. megoldás: Legyen *F* az *EB* felezőpontja. Thálész-tétele alapján így $DF=FB=EF$. Ha az $ABC\sphericalangle$ mértéke 2φ, akkor $DCB\sphericalangle$ mértéke is ekkora. Mivel $DBF\sphericalangle$ mértéke φ és $FD=FB$, így $FDB\sphericalangle$ mértéke is φ. Csakhogy $CFD\sphericalangle$ külső szöge az *FDB* háromszögnek, ezért $CFD\sphericalangle$ mértéke megegyezik a nem mellette lévő két belső szög összegével, vagyis $CFD\sphericalangle$ mértéke 2φ. Így *DCF* háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, ezért $DF=CD$, vagyis $DF=1$ *cm*. Csakhogy korábban megállapítottuk, hogy $DF=FB=FE$ és így $EB=2$ *cm*.



Helyes válasz(ok): E

9. Van egy zsebrádiónk, amely két jó ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz. Az alábbiak közül hány ilyen tesztelés elég ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

(A) *6* **(B)** *7* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Megoldás: Bebizonyítjuk, hogy hét kísérlet elegendő, annál kevesebb pedig nem.

Osszuk a nyolc elemet két darab hármas és egy kettes csoportba. Ekkor a három csoport között van olyan, amely a négy jó elem közül legalább kettőt tartalmaz, így ha az egyes csoportokon belül minden lehetőséget megvizsgálunk, akkor találunk üzemképes párost. Egy hármas csoport teszteléséhez három, a ketteséhez pedig egyetlen próba szükséges, így összesen legfeljebb $3+3+1=7$ kísérlet után sikerrel járunk.

Nézzük meg, mi történhet hat vizsgálat során. Ekkor összesen $6 \cdot 2 = 12$ elemet helyezünk a rádióba, egyeseket természetesen többször is. Ha van olyan elem - jelöljük A-val -, amelyet legalább háromszor próbálunk ki, akkor alakulhatnak úgy a kísérletek, hogy mind a hat megvizsgált párosnak hibás az egyik tagja, három esetben az A, a további háromban pedig a megmaradt három hibás elem valamelyike.

Ha egyetlen elem sem kerül kettőnél többször a rádióba, akkor ez csak úgy lehetséges, ha legalább négy elemet kétszer is kipróbálunk. A hat elvégzett kísérlet között azonban kell legyen olyan is, amelynek egyik résztvevője nem ilyen. Ha ugyanis csak ezekkel próbálkozunk és történetesen mind a négyük hibás, akkor a rádió a hatodik kísérlet után sem szólal meg. E négy elem között tehát van olyan pár, mondjuk A és B, amelyeket nem próbálunk ki együtt, hiszen a négy elemből összesen 6 pár alkotható. Ha pedig A és B hibásak, akkor a rádió néma marad abban a négy kísérletben, amelyekben A és B vesznek részt, a további két kísérlet pedig alakulhat úgy, hogy mindegyikükben a másik két hibás elem egyike akad a kezünkbe.

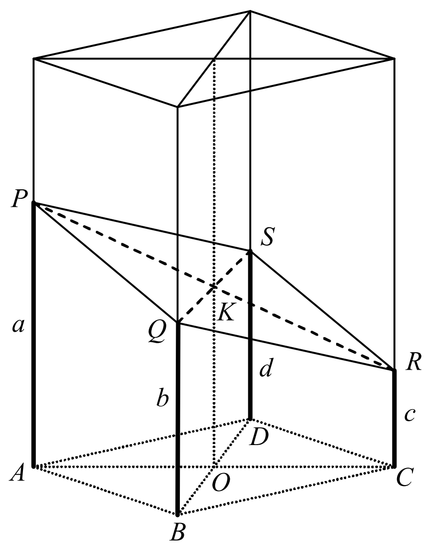
Ezzel bebizonyítottuk, hogy hat kísérlet általában nem elegendő, de 7 vagy annál több igen.

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

10. Pisti székének négy lába merőleges a négyzet alakú ülőrészre, és a lábak egyenlő hosszúak. Egyszer Pisti elfűrészelte a szék minden lábát. A lefűrészelt részek közül egy elveszett, a másik három hossza pedig 8, 9 és 10 centiméter. Hány centiméter hosszú lehet az elveszett rész, ha a széket továbbra is letehetjük úgy a földre, hogy mind a négy lába érintse a vízszintes talajt?

(A) *7* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

Megoldás: Az ábrán látható a szék. A lábak eredetileg az A, B, C, D pontokban végződtek, a lefűrészelés után a P, Q, R, S pontokban végződnek. A levágott részek hossza a, b, c, d. A feladat feltétele azt jelenti, hogy P, Q, R, S egy síkba esik. Ekkor $PQRS$ egy paralelogramma, mert $PQ \parallel SR$ és $PS \parallel QR$. Legyen $PQRS$ ill. $ABCD$ középpontja K és O. Ekkor KO az $APRC$ és a $BQSD$ trapézok középvonala, ezért



$KO=\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}\Rightarrow a+c=b+d$. Megfordítva, ha $a+c=b+d$, akkor *PR* és *QS* felezőpontja azonos, így *PQRS* paralelogramma, vagyis *P*, *Q*, *R*, *S* egy síkban van. A 8, 9, 10 cm-es részek közül bármelyik kettő lehet szemközt. Ha $a=8$, $c=9$, $b=10$, akkor $d=a+c-b=7$, ha $a=8$, $c=10$, $b=9$, akkor $d=9$, ha $a=9$, $c=10$, $b=8$, akkor $d=11$. Tehát az elveszett rész lehetett 7 *cm*, 9 *cm* vagy 11 *cm* hosszú is.

Helyes válasz(ok): A, C, E

11. Összesen hány 1-es számjegyet tartalmaz a 81-nek az a legkisebb többszöröse, amelyik csak 1-es számjegyekből áll?

(A) *9* **(B)** *36* **(C)** *63* **(D)** *81* **(E)** *99*

Megoldás: Csak az olyan számok között érdemes keresni, amelyekben 9-cel osztható számú egyes van, hiszen csak ezek oszthatók 9-cel. Legyen a számjegyek száma 9*n*. Ekkor a szám szorzattá alakítható:

$$\underbrace{1111...1}_{9n}=10^{9n-1}+10^{9n-2}+...+10+1=$$

$$=111111111\cdot\left(10^{9(n-1)}+10^{9(n-2)}+...+10^{9}+1\right).$$

Az első tényező szorzattá bomlik; a kilenc darab egyesből álló $111111111=111\cdot 1001001$. Itt mindkét tényező osztható 3-mal, de 9-cel egyikük sem, a 9*n*-jegyű szám tehát pontosan akkor osztható 81-gyel, ha a 10-hatványok összegéből álló második tényező osztható 9-cel. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha 9-cel osztható számú 10-hatvány szerepel az összegben. A legkisebb n, amelyre ez igaz, a 9, tehát a 81 csupa egyesből álló legkisebb többszöröse a 81 darab egyesből álló szám.

Helyes válasz(ok): D

12. Az *ABC* derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC=3$ *cm* és $BC=4$ *cm*. Az *A* pontot elmozdítottuk *BC*-vel párhuzamosan az *A'* pontba, ezután a *B* pontot elmozdítottuk az *A'C* egyenessel párhuzamosan a *B'* pontba, végül *C*-t mozdítottuk el *A'B'*-vel párhuzamosan a *C'* pontba úgy, hogy a kapott *A'B'C'* háromszög *B'*-ben derékszögű, az *A'B'* befogójának hossza pedig 1 *cm*. Hány centiméter hosszú lett a *B'C'* befogó?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *9* **(E)** *12*

Megoldás: Az *ABC* háromszög területe: $T_{ABC}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$ *cm*^{2}. Mivel *A*-t a *BC* egyenessel párhuzamosan toltuk el, az *A'* és *A* pontok egyenlő távolságra vannak a *BC* egyenestől, tehát $T_{A'BC}=T_{ABC}=6$ *cm*^{2}. Ezután a *B* pontot toltuk el az *A'C* egyenessel párhuzamosan, így *B'* és *B* ugyanakkora távolságra van az *A'C* egyenestől, tehát $T_{A'B'C}=T_{A'BC}=6$ *cm*^{2}. Miután a *C* pontot is eltoltuk, megkaptuk az *A'B'C'* háromszöget, aminek területe az előzőekhez hasonló okokból 6 *cm*^{2}. Mivel tudjuk, hogy $A'B'C'\sphericalangle = 90°$ és $B'A' = 1$ cm, felírhatjuk, hogy $T_{A'B'C'} = \frac{B'A' \cdot B'C'}{2} = 6$ cm^2, így $\frac{1 \cdot B'C'}{2} = 6$, ahonnan $B'C' = 12$ cm.

Helyes válasz(ok): E

13. Kockacukrokból egy 4×4×4-es tömör kockát építettünk. A kockacukrok öszszesen hány különböző téglatestet határoznak meg, ha a téglatestek legalább egy kockacukorban különböznek?

(A) *64* **(B)** *256* **(C)** *512* **(D)** *1000* **(E)** *1024*

Megoldás: A kockán belül egy téglatestet egyértelműen meghatározhatunk úgy, hogy egy-egy pár, a kocka különböző lappárjaival rendre párhuzamos síkot veszünk fel, melyek áthaladnak a kis kockacukrok megfelelő csúcsain. Mivel a nagy kocka 4×4×4-es, egy adott lappárral párhuzamosan 5 különböző megfelelő sík vehető fel; így egy sík-pár $4+3+2+1=10$-féleképpen választható ki. A kockának három különböző lappárja van, ezekhez pedig egymástól függetlenül választható síkpár, így összesen $10^3 = 1000$ különböző téglatestet határoznak meg a 4×4×4-es kockát alkotó kockacukrok.

Helyes válasz(ok): D

11. osztály

1. Egy kirándulócsoport fürdeni ment a folyóhoz. Kezdetben közülük 12 fő, majd később az ott maradottak fele átúszott a folyó túlsó partjára, és így a túlsó parton kétszer annyian lettek, mint az innensőn. Összesen hány kiránduló ment fürdeni a folyóhoz?

(A) *28* **(B)** *30* **(C)** *32* **(D)** *34* **(E)** *36*

Megoldás: Jelöljük x-szel a kirándulócsoport tagjainak a számát. Ekkor:

$$\frac{x-12}{2}=12 \Leftrightarrow x-12=24 \Leftrightarrow x=36$$

Tehát 36 kiránduló ment fürdeni a folyóhoz.
A feladatot megoldhatjuk a válaszlehetőségek ellenőrzésével is.

Helyes válasz(ok): E

2. A $2^{\log_6 18}\cdot 3^{\log_6 3}$ értéke….

(A) *racionális* **(B)** *irracionális* **(C)** $\log_2 6$ **(D)** $\log_3 6$ **(E)** *6*

Megoldás: Alkalmazzuk a logaritmus és a hatványozás ismert azonosságait, továbbá a logaritmus definícióját:

$$2^{\log_6 18}=2^{\log_6 3\cdot 6}=2^{\log_6 3+\log_6 6}=2^{\log_6 3+1}=2\cdot 2^{\log_6 3}.$$

Ezt visszahelyettesítve az eredeti kifejezésbe kapjuk, hogy

$$2\cdot 2^{\log_6 3}\cdot 3^{\log_6 3}=2\cdot 6^{\log_6 3}=2\cdot 3=6.$$

Helyes válasz(ok): A, E

3. Egy bábut kell eljuttatnunk a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából az átellenes sarokba úgy, hogy egyesével léphetünk jobbra vagy felfelé. Összesen hány olyan megfelelő útvonal van, amelyik áthalad a középső négy mező valamelyikén?

(A) *525* **(B)** *1225* **(C)** *1800* **(D)** *2450* **(E)** *2500*

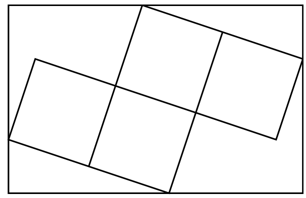
			35	175	525	1225	2450
			35	140	350	700	1225
			35	105	210	350	525
1	5	15	35	70	105	140	175
1	4	10	20	35	35	35	35
1	3	6	10	15			
1	2	3	4	5			
1	1	1	1	1			

Megoldás: Az, hogy át kell haladnunk a középső mezők valamelyikén, pontosan azt jelenti, hogy nem léphetünk az ábrán sötétre színezett mezőkre, mert így kikerülnénk a középső négy mezőt, hiszen csak jobbra vagy felfelé léphetünk.
A többi útvonal viszont mind áthalad a középső 2×2-es területen, tehát csak ezeket az útvonalakat kell összeszámolnunk.
A kiinduló mezőre egyféleképpen léphetünk. A többi mezőre pedig annyifé-

leképpen, amennyi a tőle balra lévő és alatta lévő mezőkre lépés lehetőségeinek összege, hiszen csak ezekről léphetünk rá.
Így minden mezőre beírhatjuk, hányféleképpen léphetünk oda. A jobb felső sarokba tehát 2450-féleképpen juthatunk. Ennyi a keresett útvonalak száma.

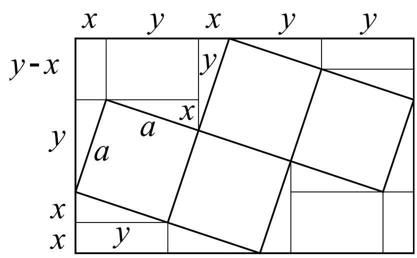
Helyes válasz(ok): D

4. Egy 11 *cm* × 7 *cm*-es téglalapból négy egybevágó négyzetet kivágtunk az ábrán látható módon. A téglalap területének hány százaléka lett hulladék?



(A) *40%-nál kevesebb* **(B)** *40%-nál több*
(C) *45%-nál kevesebb* **(D)** *50%-nál kevesebb*
(E) *50%-nál több*

Megoldás: Legyen a négyzetek oldalainak hossza a. Rajzoljuk meg azokat az ábrán látható derékszögű háromszögeket, amelyek átfogója a négyzetek 1-1 oldala, befogóik pedig párhuzamosak a téglalap megfelelő oldalaival. Ezek a derékszögű háromszögek egybevágók, mert átfogójuk a, megfelelő hegyesszögeik pedig páronként vagy váltó-, vagy egyállású, vagy merőleges szárú szögek.



Legyen ezen háromszögek rövidebbik befogójának hossza x, hosszabbik befogójának hossza y. Ekkor a téglalap oldalait ki tudjuk rakni x és y hosszú szakaszokból az ábrán látható módon. A téglalap oldalainak hosszát ismerve felírhatjuk, hogy

$$7 = x + x + y + (y - x),$$
$$11 = x + y + x + y + y.$$

Rendezve:

$$7 = x + 2y,$$
$$11 = 2x + 3y.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1$ és $y = 3$.
A Pitagorász-tételt alkalmazva:

$$a^2 = y^2 + x^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Tehát a 4 db négyzet területe: $4 \cdot 10 = 40$ cm^2.
Ezért a hulladék területe: $7 \cdot 11 - 40 = 37$ cm^2.

Azaz a téglalap $\frac{37}{40+37}=\frac{37}{77}$ -ed része, vagyis közelítőleg 48%-a hulladék.

Helyes válasz(ok): B, D

5. A Mikulás 53 szaloncukrot oszt szét három zacskóba ügyelve arra, hogy mindegyik zacskóban különböző számú szaloncukor legyen és bármely két zacskóban együtt több legyen, mint a harmadikban. Legfeljebb hányféleképpen teheti ezt meg, ha a zacskók teljesen egyformák? (Tehát például a 21, 18, 14 vagy 18, 21, 14 nem számít két különböző szétosztásnak.)

(A) *50* **(B)** *51* **(C)** *52* **(D)** *53* **(E)** *54*

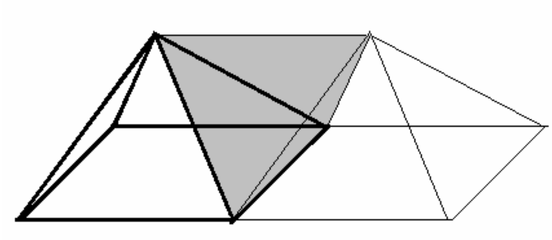
Megoldás: Jelöljük a zacskókat *A*-val, *B*-vel és *C*-vel. Ezeket a jeleket csak mi helyezzük rájuk, mert egyébként a zacskókat nem lehet megkülönböztetni. Felezzük el az 53 szaloncukrot. Mivel számuk páratlan, ezt csak úgy tudjuk, hogy az egyik fél 27, a másik 26 darab szaloncukorból áll. Rakjuk a 26 darabot az *A* zacskóba, ekkor 27-et kell a *B* és *C* zacskóba szétosztani az előírt feltételek figyelembevételével ($A=26$, $B+C=27$). A 27 felbontására annyi lehetőségünk van, ahányféleképpen 27-et fel tudjuk bontani két 2-nél nagyobb és 13-nál kisebb (vagy egyenlő) két szám összegére. Ez összesen:
$25+2$, $24+3$, $23+4$, ... , $14+13$, 12 lehetőség. Mindegyik esetben teljesül, hogy $A+B>C$, $A+C>B$, mivel *A* a legnagyobb, és $B+C>A$.
Tegyünk most az *A* zacskóba 25 cukrot. A többi 28-at osszuk szét *B*-be és *C*-be. Most is fennáll, hogy $B+C>A$. *B*-be és *C*-be pedig ($A=25$, $B+C=28$) $24+4$, $23+5$, $22+6$, ... , $15+13$ cukor kerül, ez 10 lehetőség.
Ezt addig folytatjuk, amíg *A*-ba 19, $B+C$-be együtt 34 szem cukor kerül. Tovább nem folytathatjuk, mert $A=18$, $B=19$, $C=16$ már előfordult, ha nem is ilyen sorrendben, és ugyanígy a többi is.
Most már számoljuk össze, hogy hány felbontás lehetséges, ha $A=24$, 23, 22, 21, 20 vagy 19.
Ha $A=24$, $B+C=29$, a lehetséges felbontások: $23+6$, $22+7$, $21+8$, ... , $15+14$, ez 9 eset;
$A=23$-ra $B+C=30$, és a felbontások: $22+8$, $23+9$, ... , $16+14$: ez újabb 7 lehetőség;
$A=22$-re $B+C=31$, az összegek: $21+10$, $20+11$, ... , $16+15$: ez 6 lehetőség;
$A=21$-re $B+C=32$, az összegek: $20+12$, $21+13$, ... , $17+15$: 4 lehetőség;
$A=20$-ra $B+C=33$, az összegek: $19+4$, $18+15$, $17+16$: 3 eset;
$A=19$, $B+C=34$, az összeg $18+16$, ez 1 lehetőség.
Összesen: $12+10+9+7+6+4+3+1=52$. Az összes lehetőségek száma 52, s ha még a zacskókat is meg lehetne különböztetni, akkor az összes lehetőségek száma $52\cdot 3=312$ lenne.

Helyes válasz(ok): C

6. A 10 *cm* élű négyzet alapú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. Az egyik oldallapra egy 10 *cm* élű szabályos tetraédert helyezünk úgy, hogy azok egy-egy lapja tökéletesen fedjék egymást. Összesen hány lapja van az így kapott testnek?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Azt könnyű megállapítani, hogy a test lapjainak száma 5 vagy 7. Azon múlik, hogy melyik a helyes válasz, hogy a tetraédernek a gúla két szemközti oldallapjához „folytatásként” csatlakozó lapjai egy síkba esnek-e a gúla lapjaival vagy sem.
Ha a gúlát egyik alapélének irányában 10 *cm*-rel eltoljuk, akkor a gúla felső csúcsa is 10 *cm*-rel mozdul el. A két gúla közé pontosan beillik egy szabályos tetraéder.



Az eltolás során a gúla elülső és hátulsó oldallapja súrolja a tetraéder vizsgált oldallapjait, azaz a kérdéses lapok egy síkba esnek.
A vizsgált testnek tehát 5 lapja van.

Helyes válasz(ok): B

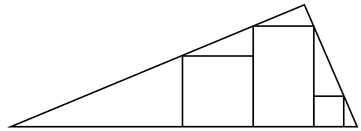
7. Egy tetraéder lapsíkjai 15 részre osztják a teret. E részek közül hányba metsz-het bele egy egyenes?

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *7* **(D)** *9* **(E)** *11*

Megoldás: Egy egyenes egy térrészből pontosan akkor kerül át egy másikba, ha átdöf legalább egy lapsíkot. Ez legfeljebb négyszer történhet meg, mert a tetraédernek négy lapsíkja van. A négy el is érhető, ha olyan egyenest választunk, amely egyik síkkal sem párhuzamos és a tetraéder egyik oldalélét sem metszi. Minden ilyen egyenes öt térrészbe metsz bele, tehát a válasz, hogy legfeljebb öt. Így (C), (D), (E) válaszok nem jók.
Könnyen találhatunk megfelelő egyenest, amely 5 részbe metsz bele az alábbi módon. Legyen P az $ABCD$ tetraéder BCD lapjának egy belső pontja. Az AB, AC egyenesek az ABC síkot négy részre osztják. Az ABC háromszöget tartalmazó résszel szemközti részben válasszunk egy olyan Q pontot, amely nem illeszkedik az APD síkra. Látható, hogy a PQ egyenes mind a négy síkot metszi, de nem metszi az AB, AC, AD, BC, BD, CD egyenesek egyikét sem. Olyat, ami háromba metsz bele, még egyszerűbben találhatunk.

Helyes válasz(ok): A, B

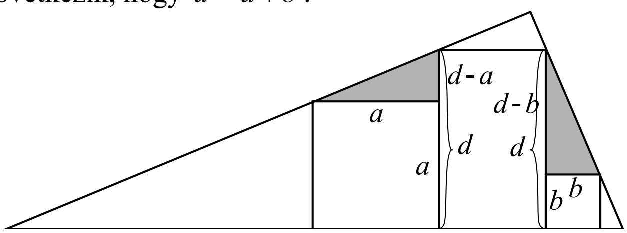
8. Egy véletlenszerűen felvett derékszögű háromszögbe az ábra szerint egy téglalapot és két négyzetet írtunk. Ekkor, ha a téglalap átfogóra merőleges oldala d és a négyzetek átfogóra merőleges oldalai a illetve b, akkor



(A) *lehet* $d > a + b$ **(B)** *lehet* $d = a + b$ **(C)** *lehet* $d < a + b$

(D) *mindig* $d < a + b$ **(E)** *mindig* $d = a + b$

Megoldás: A szürke háromszögek hasonlóak megegyező szögeik miatt. Így $\dfrac{d-a}{a} = \dfrac{b}{d-b}$, amit átrendezve $d(d-(a+b)) = 0$ adódik. Mivel $d \neq 0$, ezért ebből már következik, hogy $d = a + b$.

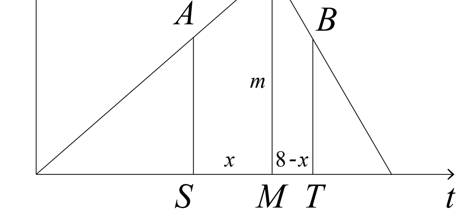


Helyes válasz(ok): B, E

9. Mikulás az eget kémleli. Másnap, a névnapján a lehető legmesszebbre szeretne eljutni, hogy ajándékot vigyen a gyerekeknek. Éjfélkor végre elkezd havazni. Mikulás a havazásnak igazán nagy szakértője. Rögtön látja, hogy ez az a fajta havazás, amely 24 órán át szakadatlanul tart. A havazás első 16 órájában a szánnal egyre gyorsabban lehet haladni úgy, hogy a havazás kezdetén a szánt meg sem lehet mozdítani, de a hó növekedésével a szánnal elérhető sebessége egyenletes növekszik. Csakhogy ezt követően a vastagodó hó egyre nagyobb akadályt jelent és az elért sebesség 8 óra alatt egyenletesen csökken egészen a nulláig. A szánt húzó rénszarvasokat Mikulás nem akarja 8 óránál tovább fárasztani. Mikor induljon el Mikulás, ha a lehető leghosszabb utat akarja megtenni? (A szán sebessége függ a hó mennyiségétől, és nem a szán gyorsulása.)

(A) *9:30* **(B)** *9:40* **(C)** *10:40* **(D)** *11:00* **(E)** *11:20*

Megoldás: A Mikulás által elérhető sebességet sebesség-idő grafikonon ábrázoltuk; a szán a 0 időpontban 0, az $M = 16$ időpontban m sebességgel haladhat, a 24. órában elérhető sebesség ismét 0. Ha a szán az S időpontban ($16 - x$ órakor) indul és - kihasználva a maximális 8 óra utazási időt - a T időpontban ($24 - x$ órakor) érkezik meg, akkor az általa megtett út éppen az $ASTBC$ ötszög területe-



te, ami az *ASMC* és a *CMTB* (esetleg elfajuló) trapézok területének az összege. A párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{AS}{CM}=\frac{16-x}{16},$$

így

$$AS=m\left(1-\frac{x}{16}\right).$$

Hasonlóan

$$\frac{BT}{CM}=\frac{x}{8},$$

így

$$BT=\frac{mx}{8}.$$

Ezért

$$t_{ASMC}+t_{CMTB}=\frac{x}{2}m\left(2-\frac{x}{16}\right)+\frac{8-x}{2}m\left(1+\frac{x}{8}\right)=\frac{3m}{32}\left[-\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+\frac{256}{9}\right]+4m$$

akkor a legnagyobb, ha $x=\frac{16}{3}$; tehát Mikulás 10 óra 40 perckor indul el.

Helyes válasz(ok): C

10. Van egy zsebrádiónk, amely két jó ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz. Az alábbiak közül hány ilyen tesztelés elég ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

(A) *6* **(B)** *7* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Megoldás: Bebizonyítjuk, hogy hét kísérlet elegendő, annál kevesebb pedig nem.

Osszuk a nyolc elemet két darab hármas és egy kettes csoportba. Ekkor a három csoport között van olyan, amely a négy jó elem közül legalább kettőt tartalmaz, így ha az egyes csoportokon belül minden lehetőséget megvizsgálunk, akkor találunk üzemképes párost. Egy hármas csoport teszteléséhez három, a ketteséhez pedig egyetlen próba szükséges, így összesen legfeljebb $3+3+1=7$ kísérlet után sikerrel járunk.

Nézzük meg, mi történhet hat vizsgálat során. Ekkor összesen $6\cdot 2=12$ elemet helyezünk a rádióba, egyeseket természetesen többször is. Ha van olyan elem - jelöljük *A*-val -, amelyet legalább háromszor próbálunk ki, akkor alakulhatnak úgy a kísérletek, hogy mind a hat megvizsgált párosnak hibás az egyik tagja, három esetben az *A*, a további háromban pedig a megmaradt három hibás elem valamelyike.

Ha egyetlen elem sem kerül kettőnél többször a rádióba, akkor ez csak úgy lehetséges, ha legalább négy elemet kétszer is kipróbálunk. A hat elvégzett kísérlet között azonban kell legyen olyan is, amelynek egyik résztvevője nem ilyen. Ha ugyanis csak ezekkel próbálkozunk és történetesen mind a négyük hibás, akkor a rádió a hatodik kísérlet után sem szólal meg. E négy elem között tehát van olyan pár, mondjuk A és B, amelyeket nem próbálunk ki együtt, hiszen a négy elemből összesen 6 pár alkotható. Ha pedig A és B hibásak, akkor a rádió néma marad abban a négy kísérletben, amelyekben A és B vesznek részt, a további két kísérlet pedig alakulhat úgy, hogy mindegyikükben a másik két hibás elem egyike akad a kezünkbe.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy hat kísérlet általában nem elegendő, de 7 vagy annál több igen.

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

11. Az alábbiakból hány olyan egymástól különböző pozitív egész szám adható meg, amelyek közül, ha bármely két x, y-t kiválasztjuk úgy, hogy $x > y$, akkor $x - y \geq \frac{xy}{25}$?

(A) *7* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

Megoldás: Ha x egy adott pozitív egész, és a nála kisebbek közül a legnagyobb adott az y, akkor ezekre fennáll, hogy $x - y \geq \frac{xy}{25}$. Ez a feltétel teljesül az y-nál kisebb többi adott számra is, hiszen y csökkentésével az egyenlőtlenség bal oldala nő, a jobb oldal viszont csökken.
Keressük meg az adott y-hoz tartozó minimális x értékeket. Az (y,x) párok a következők: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,7), (7,10), (10,17), (17,54). A feltételnek megfelelnek az 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54 számok (de ezen kívül megadható más kilenc szám is, például 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 600).
Bebizonyítjuk, hogy 9-nél több szám nem adható meg.
Az 5 és 6 egyszerre nem lehetnek a számok között, ugyanis $6 - 5 < \frac{6 \cdot 5}{25}$.
A 7, 8, 9 közül szintén csak egy lehet az adottak között, hiszen e számokra $x - y$ értéke legfeljebb 2, a jobb oldal minimuma pedig $\frac{7 \cdot 8}{25}$, ami nagyobb, mint 2.
A 10, 11, 12, 13, 14 számok közül is csak egyetlen lehet az adottak között, hiszen itt $x - y$ értéke maximum 4, a jobb oldal minimuma pedig $\frac{10 \cdot 11}{25}$, ami nagyobb, mint 4. Hasonlóan a 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 számok közül is csak egyetlen lehet az adottak között, hiszen $x - y$ értéke most maximum 9, a jobb oldal minimuma pedig $\frac{15 \cdot 16}{25}$, ami nagyobb, mint 9.

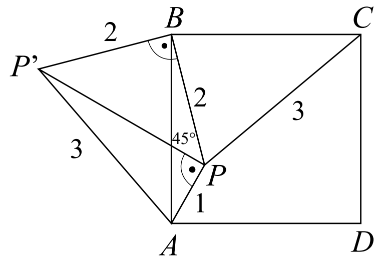
Mivel $x-y \geq \frac{xy}{25}$ és $y>0$, azért $x>\frac{xy}{25}$, amiből $25>y$. Ezért csak egy elem lehet 24-nél nagyobb.
Ezért legfeljebb kilenc megfelelő szám adható.

Helyes válasz(ok): A, B, C

12. Az $ABCD$ négyzet belsejében úgy vettük föl a P pontot, hogy $AP:BP:CP=1:2:3$. Hány fokos az APB szög?

(A) *90°* **(B)** *115°* **(C)** *120°* **(D)** *135°* **(E)** *150°*

Megoldás: Forgassuk el a BPC háromszöget B körül 90°-kal úgy, hogy C képe A legyen. Jelölje P' a P elforgatottját (lásd az ábrán). Ekkor a $P'BP$ háromszög egyenlő szárú és B-nél lévő szöge derékszög. Ezért $P'PB\sphericalangle 45°$, valamint Pitagorász tétele szerint



$$P'P^2=P'B^2+PB^2=2\cdot PB^2.$$

Válasszuk az AP szakasz hosszát egységnek. Ekkor a feltétel szerint $PB=2$ és $PC=P'A=3$. Vagyis

$$P'A^2=9=8+1=P'P^2+PA^2,$$

tehát a Pitagorász tétel megfordításából következően a $P'PA\sphericalangle$ derékszög.
Tehát $APB\sphericalangle=APP'\sphericalangle+P'PB\sphericalangle=90°+45°=135°$.

Helyes válasz(ok): D

13. Amikor a hajó annyi idős lesz, mint a kapitány most, akkor a kapitány éppen 32 évvel lesz idősebb, mint amennyi a hajó volt akkor, amikor a kapitány feleannyi idős volt, mint a hajó most. Hány éves lehet a kapitány, ha tudjuk, hogy idősebb a hajónál? (Figyelem, az életkorok nem feltétlenül egész számok!)

(A) *15* **(B)** *24* **(C)** *32* **(D)** *48* **(E)** *64*

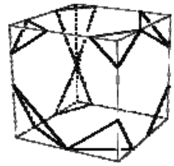
Megoldás: Jelölje h a kapitány és a hajó jelenlegi életkorának a különbségét, ez a szöveg szerint pozitív. Legyen a idős a kapitány a múltban, b idős a jelenben és c idős a feladat szövege szerinti jövőben. Ekkor $c-h=b$, $c-32=a-h$ és $2a=b-h$.
Az első két egyenletből $2h+b=a+32$. Az a-t kiejtve $5h+b=64$. Mivel a feltételek szerint $h>0$, azért $b<64$. A b-t kiküszöbölve: $2a+3h=a+32$, azaz $a+3h=32$. Az $a\geq h$ feltétel miatt $h\leq 8$, ahonnan $b\geq 24$.
A c mindig legalább akkora, mint b, tehát vele már nem kell foglalkozni, a pedig e feltételekkel már b és h között lesz. Tehát a kapitány legalább 24 és kevesebb mint 64 éves.

Helyes válasz(ok): B, C, D

12. osztály

1. Egy tömör kocka minden csúcsát úgy vágtuk le, hogy így egy 8 háromszöglapból és 6 hétszöglapból álló testet kaptunk. Összesen hány éle lehet egy ilyen testnek?

(A) *14* **(B)** *24* **(C)** *33* **(D)** *42* **(E)** *66*



Megoldás: A testet határoló sokszögeknek összesen $8\cdot 3+6\cdot 7=66$ oldala van. Ezek az oldalak alkotják a test éleit, viszont, mivel a test két lapjának találkozásánál jön létre egy él, két sokszög egy-egy oldala alkot egy élet. A test éleinek száma ezért 33.

Helyes válasz(ok): C

2. Egy kávézóban három kétszemélyes asztalnál összesen hatan foglalnak helyet. Közülük hárman kávét, hárman teát isznak. Mekkora a valószínűsége annak, hogy van olyan asztal, ahol mind a ketten teát isznak, ha minden ember ugyanakkora valószínűséggel, a többiektől függetlenül választ italt? (Minden asztalnál ketten ülnek.)

(A) *0,4* **(B)** *0,5* **(C)** *0,6* **(D)** *0,7* **(E)** *0,8*

Megoldás: A 3 kávét és a 3 teát a 6 vendég között $\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=20$-féleképpen lehet felszolgálni (módszeresen is összeszámolható).
Ha van olyan asztal, ahol mindkét vendég teát iszik, akkor a másik 4 vendég között kell a 3 kávét és 1 teát szétosztani, 4 lehetőség. Mivel 3 asztal van, ez bármelyiknél előfordulhat, vagyis a kedvező esetek száma $3\cdot 4=12$.
A keresett valószínűség a kedvező esetek és az összes esetek számának hányadosa, $P=\dfrac{12}{20}=0,6$.

Helyes válasz(ok): C

3. Összesen hány olyan különböző *a* valós szám létezik, amelyre az $\dfrac{a+2}{a^2+1}$ tört értéke pozitív egész szám?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *végtelen sok*

Megoldás: Legyen $\dfrac{a+2}{a^2+1}=k$, ahol $k\in Z^+$. Ekkor

$$a+2=k(a^2+1),$$

ami rendezés után

$$ka^2-a+k-2=0.$$

Ez a-ban másodfokú egyenlet, ahonnan

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k(k-2)}}{2k},$$

amely pontosan akkor valós szám, ha a diszkrimináns nem negatív.

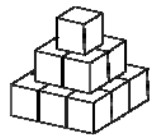
Tehát, ha $1-4k(k-2) \geq 0$, amiből $\frac{1}{4} \geq k(k-2)$. A feltételek miatt innen $k=1$ vagy $k=2$ lehetséges. Az ezekhez tartozó a értékek:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \qquad 0; \qquad \frac{1}{2}; \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ezek valóban megfelelnek a feltételeknek, tehát összesen négy megfelelő a érték létezik.

Helyes válasz(ok): D

4. Az ábrán látható három emeletes „piramist" 1 cm^3-es kockákból építettük, felszíne 42 cm^2. Ennek mintájára készítettünk egy nagyobb „piramist" is, amelynek 2352 cm^2 a felszíne. Hány emeletes lehet az a „piramis”?



(A) *12* **(B)** *12-nél több* **(C)** *18* **(D)** *18-nál több* **(E)** *20-nál több*

Megoldás: Vizsgáljuk meg először, hogy a három emeletes piramisnak hogyan számíthatjuk ki a felszínét. A legalsó réteg alaplapjának területe 3^2 cm^2, ugyanennyi a fedőlapé is. A következő rétegekben egyrészt az alapterületet le kell vonni, másrészt a fedőlap területét hozzá kell adni. Ezek tehát nem befolyásolják a felszín értékét. Végül ki kell számítani az oldallapok területét. Azaz a háromrétegű piramis felszíne:

$$3^2 + 3^2 + 4(1+2+3) = 42 \ cm^2.$$

Tegyük most fel, hogy n réteget helyeztünk egymás fölé, ekkor a felszín:

$$2n^2 + 4(1+2+\ldots+n) = 2n^2 + 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 2352.$$

Rendezve az egyenletet, kapjuk, hogy

$$2n^2 + n - 1176 = 0,$$

ahonnan $n_1 = 24$, $n_2 = -\frac{49}{2}$ Tehát az általunk készített „piramis" 24 emeletes.

Helyes válasz(ok): B, D, E

5. Mennyi lehet $\lg(x) - \lg(y)$ értéke, ha x és y olyan pozitív számok, melyekre $10x^2 - 101xy + 10y^2 = 0$?

(A) *−2* **(B)** *−1* **(C)** *0* **(D)** *1* **(E)** *2*

Megoldás: Mivel $y > 0$, az egyenletet eloszthatjuk y^2-tel és az

$$10\left(\frac{x}{y}\right)^2-101\frac{x}{y}+10=0$$

$\frac{x}{y}$ -ban másodfokú egyenletet kapjuk, amit megoldva:

$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{101\pm\sqrt{101^2-4\cdot10\cdot10}}{2\cdot10}=\frac{101\pm99}{20}$ és így $\frac{x}{y}=10$ vagy $\frac{x}{y}=\frac{1}{10}$.

A logaritmus tulajdonságai segítségével: $\lg(x)-\lg(y)=\lg\left(\frac{x}{y}\right)$ és így

$\lg(x)-\lg(y)=\lg\left(\frac{1}{10}\right)=-1$ vagy $\lg(x)-\lg(y)=\lg(10)=1$.

Helyes válasz(ok): B, D

6. Az a_n sorozatot a következőképpen értelmezzük:
$a_1=1$, $a_{2n}=a_n$, $a_{2n+1}+a_n=1$. Mennyi a_{2022}?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *1011* **(D)** *2021* **(E)** *2022*

Megoldás: $a_{2022}=a_{1011}=1-a_{505}=1-(1-a_{252})=a_{252}=a_{126}=a_{63}=1-a_{31}=$
$=1-(1-a_{15})=a_{15}=1-a_7=1-(1-a_3)=a_3=1-a_1=1-1=0$.

Helyes válasz(ok): A

7. Történt egyszer egy matematikaórán, hogy egy diák az $(a+2b-3)^2$ négyzetre emelést rosszul végezte el, és a^2+4b-9 lett az eredménye. Tanára kérésére ellenőrzésképpen behelyettesített *a* és *b* helyére egy-egy természetes számot. A behelyettesítés után az eredmény helyesnek bizonyult. Mely számokat helyettesíthette a tanuló *b* helyére az alábbiak közül?

(A) *–30* **(B)** *13* **(C)** *77* **(D)** *986* **(E)** *2022*

Megoldás: Hasonlítsuk össze a két eredményt:

$$a^2+4ab+4b^2-6a-12b+9=a^2+4b-9.$$

Összevonás után kapjuk, hogy

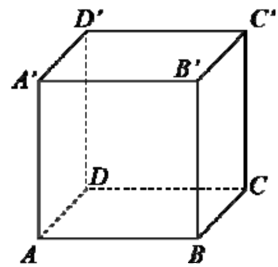
$$4b^2+4ab-6a-16b+18=0. \qquad (1)$$

Keressük azokat az *a* és *b* értékeket (egész számokat), amelyekre teljesül az egyenlőség, ellenőrizve a válaszlehetőségeket.
Az (A) válasz nem jó, mivel a -30 nem természetes szám.
Az (1) egyenlőségbe *b* helyére rendre beírva 13, 77, 986 és 2022 értékeket *a*-ra mindig negatív szám keletkezik, így egyik válaszlehetőség sem helyes.

Helyes válasz(ok): -

8. Adott az *ABCDA'B'C'D'* kocka. A kocka csúcsai közül minden lehetséges módon kiválasztunk ötöt. Az öt választott csúcs által meghatározott test térfogata hányad része lehet az eredeti kocka térfogatának?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$



Megoldás: Jelöljük a kockát az ábra szerint és válasszuk a kocka élhosszát egységnyinek. A test 5 csúcsa közül legalább 3 a kockának egyazon lapján található. Az általánosság megszorítása nélkül legyen ez a 3 csúcs az *A*, *B* és *C*. A másik 2 csúcs elhelyezkedésétől függően három esetet különböztethetünk meg.

a) Ha *D* is a választott 5 csúcs között van, akkor *A'*, *B'*, *C'* vagy *D'* bármelyike az ötödik csúcs, akkor gúlát kapunk, melynek magassága egyenlő a kocka élével, így térfogata: $\frac{1}{3} \cdot T_{alaplap} \cdot m = \frac{1}{3} \cdot V_{kocka}$, tehát (C) jó válasz.

b) Ha *D* nincs a kiválasztott csúcsok között, akkor *A'*, *B'*, *C'*, *D'* közül kettőt választottunk. Ha *D'* nincs közöttük, akkor vagy van egy olyan lap, amelynek mind a 4 csúcsát kiválasztottuk, és így az a) esetbeli eredményre jutunk, vagy az *A'*, *C'* csúcsokat választottuk. Ez utóbbi test egybevágó egybevágó azzal a másik két testtel, amelynek *A'*, *D'*, illetve *C'*, *D'* a fedőlapon lévő két csúcsa. Vizsgáljuk meg az *ABCA'C'* testet! Az *A*, *C*, *A'*, *C'* pontok egy síkban vannak, egy téglalap négy csúcsát alkotják, maga a test pedig téglalap alapú gúla. Az ötödik csúcs távolsága az alaplaptól a kocka lapátlójának a felével egyenlő, ezért a gúla térfogata most is $\frac{1}{3} \cdot V_{kocka}$.

c) Ha a kiválasztott csúcsok *A*, *B*, *C*, *D'*, *B'* akkor a test két, az *ACB'* lap mentén összeillesztett tetraéderből áll. A *BD'* egyenes merőleges az *ACB'* háromszög síkjára, tehát a két tetraéder *ACB'* lapjához tartozó magasságának az összege éppen $BD' = \sqrt{3}$, a kocka testátlója. Az *ACB'* háromszög szabályos, a területe tehát $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. A két tetraéder együttes térfogata így $\frac{1}{2} \cdot V_{kocka}$, tehát (D) is jó válasz.

Helyes válasz(ok): C, D

9. Az alábbiak közül a hátulról (jobbról) számított hányadik helyen áll 0 a $111\ldots1^2$ szám tízes számrendszerbeli alakjában, ahol a 112 darab egyesből álló számot emeltük négyzetre?

(A) *64.* **(B)** *66.* **(C)** *73.* **(D)** *77.* **(E)** *82.*

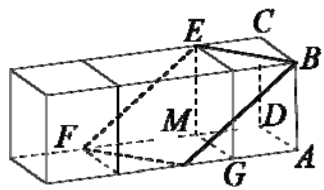
Megoldás: Ha a szorzást elvégezzük, akkor az egyes részletszorzatok csupa egyesből állnak. Ha ezeket összeadjuk, akkor az utolsó helyen 1 db, előtte 2 db, ..., jobbról a 112. helyen 112 darab egyest kell összeadni. Így hátulról előrehaladva a szorzat számjegyei 1, 2, 3, ..., 9. A tizedik helyen (ahol az összeg 10) a 0 számjegy lesz, és az átvitel 1. Így a következő számjegy nem 1, hanem 2 lesz, majd innen megint egyesével növekszik. A 0 számjegy után mindig 2 következik, mivel az átvitel eggyel nő. Így minden 9-cel osztható helyiértéken 9 van, vagyis a 63., 72. és 81. helyen is. Tehát a hátulról számított 64., 73. és 82. számjegy 0 lesz, mivel az következik az előbbi sorozatban a 9-es után, a 66. és a 77. viszont nem lesz 0.

Helyes válasz(ok): A, C, E

10. Egy 12×12×35 *cm*-es, 5 *kg* tömegű gépsonkát ferdén vágtunk el úgy, hogy a paralelogramma alakú metszet oldalhosszúsága 15 és 20 *cm*. Hány *kg* lehet a keletkezett két darab valamelyikének a tömege?

(A) *1,5* **(B)** *1,8* **(C)** *2,5* **(D)** *3* **(E)** *3,5*

Megoldás: Jelöljük a négyzetes oszlop egyik négyzetének csúcsait *A*, *B*, *C* és *D*-vel. A levágott rész térfogata akkor lesz a legkisebb, ha a vágást valamelyik csúcsnál kezdjük, legyen ez a *B*. A paralelogramma csúcsait jelölje *B*, *E*, *F* és *G* (az ábra szerint).



Az *E* csúcson át húzzunk párhuzamost a *CD* éllel, messe ez a szemközti élt az *M* pontban, $EC = MD$. Az *ECB* derékszögű háromszögből

$EC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\ cm$. Az *EMF* háromszögből $FM = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16\ cm$, és ezért $FD = 25\ cm$.

A levágott rész után kapott test egy négyzetes hasábból és egy ugyanolyan darabból áll, mint amilyet levágtunk. A hasáb élei 10 és 12 *cm* hosszúak. A két egybevágó darab együtt egy 25×12×12-es hasáb; a levágott rész térfogata ennek fele, azaz 1800 cm^3.

Tudjuk, hogy a gépsonka 5040 cm^3-es térfogatának a tömege 5 *kg*. A levágott 1800 cm^3-es rész tömege tehát

$$x = \frac{1800 \cdot 5}{5040} \approx 1{,}7857\ kg.$$

A levágott darab tömege 1,7857 *kg* és 3,2143 *kg* között bármennyi lehet, attól függően, hogy hol kezdtük el a vágást.

Helyes válasz(ok): B, C, D

11. Mi az utolsó 3 számjegye (az adott sorrendben) annak a legkisebb pozitív számnak, ami a 81-nek többszöröse és csak 0 és 1 számjegyek alkotják?

(A) *101* **(B)** *111* **(C)** *011* **(D)** *001* **(E)** *110*

Megoldás: Csak az olyan számok között érdemes keresni, amelyekben 9-cel osztható számú egyes van, hiszen csak ezek oszthatók 9-cel.

A legkisebb szóba jövő számoknak tíz jegye van, egyikük 0. Minden ilyen szám megkapható úgy, hogy a tíz egyesből álló számból kivonunk egy nála kisebb 10-hatványt. Vizsgáljuk meg a 10-hatványok maradékát 81-gyel osztva a 0-tól a 9-es kitevőig.

kitevő	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
maradék	1	10	19	28	37	46	55	64	73	1

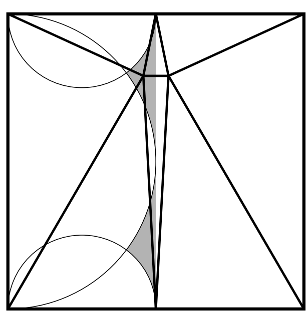
A tíz egyesből álló szám 81-es maradéka ezek összege: $334 = 4 \cdot 81 + 10$. A felsorolt 10-hatványok között van olyan, mégpedig pontosan egy, amelynek ugyanennyi a 81-es maradéka: ez a 10. Ezt elhagyva 1111111101 adódik: ez a szám osztható 81-gyel, a többi legfeljebb tízjegyű egyesekből és nullákból álló szám pedig nem.
A vizsgált számok közül tehát a tízjegyű 1111111101 a legkisebb és ennek utolsó három jegye 101.

Helyes válasz(ok): A

12. Ha egy négyzetet hegyesszögű háromszögekre darabolunk, hány rész keletkezhet?

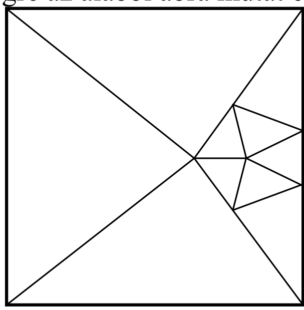
(A) *6* **(B)** *8* **(C)** *10* **(D)** *12* **(E)** *14*

1. megoldás: A feldarabolásban nevezzük csomópontnak minden olyan pontot, amely háromszögek közös csúcsa, és éleknek azokat a szakaszokat, amelyek csomókat kötnek össze, de a belsejükben nincs csomópont.
Szükséges, hogy a négyzet belsejében legyen csomópont. A négyzet csúcsaiból befelé élnek kell indulnia, és ha nincs belső csomópont, akkor egy nem szomszédos oldal egyik pontjában végződik, így „elvágja egy másik él útját"; így mindenképpen belső csomópontban kell végződniük a négyzetcsúcsokból induló éleknek.
Tehát legalább egy belső csomópont van, legyen ez A. Az A-ból legalább 5 él indul ki, mert az (A csúcsú) teljes szöget hegyesszögekre kell bontani. Ezek mindegyike nem futhat négyzetcsúcsba: legalább egynek egy másik belső csomópontban vagy belső oldalpontban kell végződnie.
Ha A-n kívül nem lenne más belső csomó, akkor az egyik négyzetoldal belsejében van csomópont: ebből még egy él kiindul a korábbiakon kívül, hogy az egyenesszöget hegyesszögekre vágja szét. Ez viszont csak egy újabb csomópontban végződhet, különben élt keresztezne.



Így két belső csomópont mindenképpen keletkezik, melyek mindegyikéből legalább 5 - 5 háromszög csúcsába fut él, és ezek közül legfeljebb kettő eshet egybe (a csomókat összekötő élre illeszkedő két háromszög). Ezért a felbontásban legalább $2+3+3=8$ háromszögnek kell lennie.
Meg kell még mutatnunk, hogy valóban létezik egy négyzet feldarabolása 8 hegyesszögű háromszögre.

A két, berajzolt látóköríven (Thalesz-körön) kívül eső satírozott rész bármely belső pontját kiválaszthatjuk A-nak. Tengelyes tükrözéssel és a belső él megrajzolásával megkapjuk a 8 megfelelő hegyesszögű háromszöget.
10 hegyesszögű háromszögre az alábbi ábra mutat egy helyes feldarabolást.



12 és 14 esetén az olvasóra bízzuk a megfelelő felbontás elvégzését.

2. megoldás: Megmutatjuk, hogy legalább 8 háromszög keletkezik. Ennyi háromszögre fel is lehet bontani, például az 1. megoldás ábráján látható módon.
Tegyük fel, hogy a felbontást úgy végeztük el, hogy összesen a darab csomópont van a négyzet oldalain, b darab csomópont pedig a négyzet belsejében. Ekkor a felbontás egy olyan gráfot ad, amelynek $c = 4 + a + b$ darab csúcsa van (a négyzet 4 csúcsa is csúcsa a gráfnak). Ha l háromszög keletkezik, akkor a gráf élei számának a kétszerese pedig:

$$2e = 3l + 4 + a. \quad (1)$$

A $3l$-lel a négyzet belsejében levő háromszögek oldalait számoltuk meg kétszer, de a négyzet oldalaira esőket csak egyszer, melyek száma pontosan $4 + a$. Eulernek a síkba rajzolható gráfokra vonatkozó tétele szerint (ahol a gráfnak c csúcsa, l tartománya és e éle van) $c + l = e + 1$, amiből $l = e + 1 - c$. Ezt beírva (1)-be azt kapjuk, hogy $2e = 3(e + 1 - c) + a + 4 = 3e - 2a - 3b - 5$, ebből

$$e = 2a + 3b + 5. \quad (2)$$

Mivel a felbontásban hegyesszögű háromszögek szerepelnek, a négyzet csúcsaiból legalább 3, az oldalán levő pontokból legalább 4, a belső pontokból pedig legalább 5 élnek kell kiindulnia. Ezért $2e \geq 4 \cdot 3 + a \cdot 4 + b \cdot 5$, azaz $e \geq 6 + 2a + 2{,}5b$. Ezt összehasonlítva (2)-vel kapjuk, hogy $b \geq 2$.
Mivel minden belső pontnál legalább 5 háromszögnek kell találkoznia, a két belső pontnál legfeljebb 2 olyan háromszög lehet, ami mindkét belső pont csúcsa. Vagyis legalább $2 \cdot 5 - 2 = 8$ háromszög van a felbontásban.

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

13. Egy asztalon 99 pálca van, a hosszuk 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, ..., 99 *cm*. Andrea és Béla a következő játékot játsszák: felváltva elvesznek egy-egy általuk választott pálcát; a játékot Andrea kezdi. A játéknak akkor van vége, amikor pontosan három pálca marad az asztalon. Ha a megmaradó három pálcából összeállítható egy háromszög, akkor Andrea nyer, különben Béla. Melyik válasz helyes az alábbiak közül?

(A) *Előfordulhat, hogy Andrea nyer.* **(B)** *Előfordulhat, hogy Béla nyer.*

(C) *Bárhogy játszik Béla, Andrea tud nyerni.*

(D) *Bárhogy játszik Andrea, Béla tud nyerni.*

(E) *Az előzőekből pontosan 2 válasz helyes.*

Megoldás: Megtörténhet, hogy a három leghosszabb pálca (97, 98, 99) marad a végén, és akkor Andrea nyer. Így (A) válasz helyes.
Előfordulhat, hogy a három legrövidebb pálca (1, 2, 3) marad a végén, és akkor Béla nyer. Tehát (B) is jó válasz.
Most megmutatjuk, hogy Béla, ha akarja, mindenképp tud nyerni, bárhogy is játszik Andrea.
Az 1, 2, 3, ..., 99 számokat x, $x + 50$ alakú párokba állítva egyedül az 50 marad pár nélkül. Béla nyerő stratégiája, pl. a következő. Ha Andrea 50 egységnél rövidebb pálcát vesz le, akkor Béla ennél 50-nel hosszabbat, ha pedig Andrea 50 egységnél hosszabbat vesz le, akkor Béla ennél 50 egységgel rövidebbet. Ha Andrea leveszi az 50 egység hosszú pálcát, akkor Béla egy ennél hosszabb pálcát vesz le. Így viszont előfordulhat, hogy ha ezután Andrea levesz egy 50 egységnél rövidebb pálcát, akkor az ennél pontosan 50-nel hosszabb már le van véve; ilyen esetben Béla egy másik, 50 egységnél hosszabb pálcát vesz le stb.
Amennyiben a játék végére az 50-es pálca fennmarad, akkor Béla stratégiája miatt a másik két pálca hosszának különbsége 50 egység. Így nem lehet háromszöget összeállítani belőlük, mert a „háromszög" oldalai: $a = X$, $b = X + 50$, $c = 50$, így $a + c = b$, tehát a háromszög elfajuló.
Ha viszont az 50-es pálca valamikor lekerül az asztalról, akkor a végén két darab 50-nél rövidebb és egy darab 50-nél hosszabb pálca marad, és Béla stratégiája miatt az egyik pálca 50-nel rövidebb, mint a leghosszabb fennmaradt pálca: $a = X$, $b = X + 50$ és $c = 50 - Y$. Így nem lehet háromszöget összeállítani belőlük, hiszen $a + c < b$.
Így (C) nem jó és (D) jó válasz.
Mivel az első 4 válasz közül három jó, így (E) válasz nem jó.

Helyes válasz(ok): A, B, D