

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2025. MÁRCIUS 8.
MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	A C D	A B C E	1.	A B C D	B E	1.
2.	B	A C	2.	A	C	2.
3.	A C	A E	3.	B	A C D E	3.
4.	A D	B C D E	4.	A B C	A B C D	4.
5.	D E	A B	5.	A B	A E	5.
6.	A B	B C D	6.	D	A E	6.
7.	C E	A B E	7.	B	E	7.
8.	A B	A B	8.	A	A B C D	8.
9.	E	A B C	9.	A B C	E	9.
Max.	141 pont	149 pont	Max.	141 pont	145 pont	Max.

9. osztály: Az első egyenletnek megfelelő pontpárokat ábrázolva, ha $y \geq -x$ (1 pont), az ábránkon látható függőleges félegyenest kapjuk (2 pont), ellenkező esetben a vízszintes félegyenest (2 pont). Ezek találkozási pontja az $(1; -1)$ (1 pont).

A második egyenlet grafikonja egyenes, hiszen $y = ax - 2$ lineáris függvényről van szó (1 pont).

Ha $a < 0$, akkor csökkenő (1 pont) és mindenképp egyetlen pontban metszi az első egyenletnek eleget tevő ponthalmazt (2 pont), tehát ez megfelel a feladat feltételeinek.

Ha $a > 0$, akkor növekvő és csakis akkor kapunk egyetlen metszéspontot, ha az $y = ax - 2$ egyenes áthalad az $(1; -1)$ ponton (1 pont), ellenkező esetben vagy két pontban metszi (1 pont), vagy egyben sem (1 pont).

Az $(1; -1)$ ponton akkor halad át, ha $-1 = a \cdot 1 - 2$, vagyis, ha $a = 1$ (1 pont).

Ha $a = 0$, akkor a második egyenlet $y = -2$ és ennek nincs közös pontja az első egyenlet félegyeneseivel, így ez nem megfelelő (1 pont).

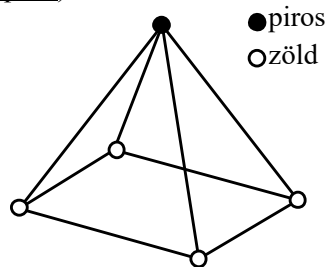
Tehát a feladat kérdésének az $a < 0$ és $a = 1$ valós számok felelnek meg (1 pont).

Eltérő helyes megoldást ezzel arányosan kell pontozni.

(Összesen max. 16 pont)

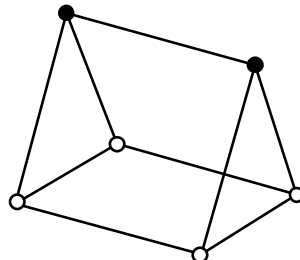
10. osztály:

Megoldás: Ha a térben egy pont sem piros, akkor bármely egységoldalú négyzet csúcsai zöldek, és készen vagyunk. Feltessük tehát, hogy van piros pont is (1 pont). Válasszunk ki egyet, és tekintsünk egy olyan négyzet alapú gúlát, amelynek minden éle egységnyi, csúcsa pedig a kiválasztott pont (3 pont).



Ha az alapnégyzet minden csúcsa zöld, ismét találtunk megfelelő négyzetet (1 pont). Ha nem, akkor van két piros pont egységnyi távolságra egymástól (2 pont).

Ezekre a pontokra az utóbbi ábrán látható módon építsünk fel egy szabályos háromszög alapú, egység magasságú hasábot ("háztetőt") (4 pont).



Ha a négy további csúcs bármelyike piros, akkor az előbb kiválasztott két piros ponttal együtt ez egy egységoldalú négyzet harmadik piros csúcsa lesz (2 pont). Ha viszont mind a négy pont zöld, azok egy zöld csúcsú egység-négyzetet alkotnak (2 pont).

Ezzel megmutattuk, hogy vagy van olyan egység-négyzet, amelynek minden csúcsa zöld, vagy van olyan, amelynek leg-
alább három csúcsa piros (1 pont).

(Összesen max. 16 pont)

11. osztály: Mivel bármely valós x -re:

$$g(x+6) = f(x+6) - (x+6) = f((x+3)+3) - x - 6 \leq f(x+3) + 3 - x - 6 \leq$$

$$\leq f(x) + 3 + 3 - x - 6 = f(x) - x = g(x), \text{ (6 pont) és}$$

$$g(x+6) = f(x+6) - (x+6) = f((x+4)+2) - x - 6 \geq f(x+4) + 2 \geq$$

$$\geq f(x+2) + 2 + 2 - x - 6 \geq f(x) + 2 + 2 + 2 - x - 6 = f(x) - x = g(x) \text{ (7 pont).}$$

Mindebből következik, hogy $g(x+6) = g(x)$ bármely valós x -re, vagyis a g függvénynek a 6 periódusa (3 pont).

(Összesen max. 16 pont)

12. osztály: Lehet egyforma mind az öt: $(a; a; a; a; a)$ (1 pont), vagy négy: $(a; a; a; a; 3a)$ (3 pont). Megmutatjuk, hogy nem fordulhat elő az, hogy közülük csak három vagy annál kevesebb legyen egyforma.

Ugyanis, legyen az öt szám $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Ekkor e osztója $a+b+c$ és $b+c+d$ -nek (2 pont), így ezek különbségének $(b+c+d) - (a+b+c) = d-a$ -nak is (2 pont). Csakhogy $0 \leq d-a < d \leq e$ (2 pont), vagyis e osztója egy nálánál kisebb

$d-a$ számnak (1 pont). Ez csakis akkor lehetséges, ha $d-a=0$ (2 pont), vagyis $d=a$. Mivel $a \leq b \leq c \leq d$, ezért $a=b=c=d$ (2 pont). Tehát a feladat feltételei alapján az öt szám közül legalább négynek azonosnak kell lennie (1 pont).

(Összesen max. 16 pont)