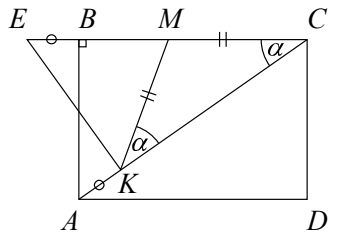


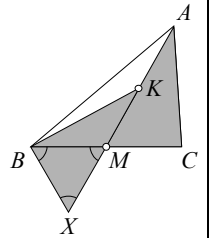
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2024. MÁRCIUS 9.
MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	B C	B D	1.	A B	D	1.
2.	A C	A B C D	2.	B C D E	B D	2.
3.	A	A C E	3.	C D	A B C	3.
4.	A B C D E	C	4.	B C	E	4.
5.	E	D E	5.	B C	A B C	5.
6.	A B C D E	C D E	6.	B C E	A B C	6.
7.	A B C D	A B C	7.	A B C	A B C	7.
8.	A B	A B C	8.	C	A B C D	8.
9.	C	A B C	9.	A E	A B C E	9.
Max.	131+16 pont	132+16 pont	Max.	129+16 pont	132+16 pont	Max.

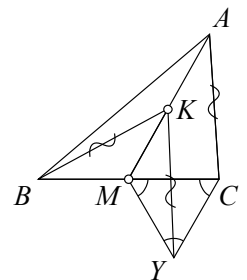
9. osztály: CB meghosszabbítására B -n túl vegyük fel azt az E pontot, amelyre $BE = AK$ (1 pont). Ekkor $CE = CB + BE = CK + KA = CA$ (2 pont). EKC és ABC háromszögekben $CE = CA$, $CK = CB$ és ezek által közrezárt ECA szög közös, így e két háromszög egybevágó (3 pont). Ebből következik, hogy $EKC \sphericalangle = ABC \sphericalangle = 90^\circ$ (2 pont). Bevezetve a $KCM \sphericalangle = MKC \sphericalangle = \alpha$ jelölést (2 pont), adódik, hogy $MKE \sphericalangle = 90^\circ - \alpha = MEK \sphericalangle$ (2 pont) és így $ME = MK = MC$ (2 pont). Mindezek alapján $AK + BM = BE + BM = ME = CM$, amit bizonyítani kellett (2 pont). (Összesen max. 16 pont)



10. osztály: 1. megoldás: Hosszabbítsuk meg AM -et M -en túl X pontig úgy, hogy $MX = MB$ (2 pont). Ekkor $BMX \sphericalangle$ csúcsszöge $AMC \sphericalangle$ -nek, így $BMX \sphericalangle = 60^\circ$ (2 pont). Mivel BMX egyenlőszárú háromszög, alapon fekvő szögei egyenlők, és lévén, hogy a csúcsnál lévő szög 60° -os, ezért minden szöge 60° (2 pont). Észrevehető, hogy $AM = AK + KM = BM + KM = MX + KM = KX$ (2 pont). Összehasonlítva AMC háromszöget KXB háromszöggel, azt találjuk, hogy $AM = KX$, $AMC \sphericalangle = KXB \sphericalangle$ és $MC = BX$, vagyis két-két oldal és azok által közrezárt szögek egyenlők (4 pont), így AMC és KXB háromszögek egybevágók (2 pont) és ezáltal $AC = KB$, amit bizonyítani kellett (2 pont).



2. megoldás: Tükrözzük B -t AM -re és B tükörképe legyen Y (2 pont)! Ekkor $AMY \sphericalangle = AMB \sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, és $MY = MB = MC$ (2 pont). Csakhogy $YMC \sphericalangle = AMY \sphericalangle - AMC \sphericalangle = 60^\circ$ (1 pont). Mivel az YMC háromszögben $MY = MC$ és $YMC \sphericalangle = 60^\circ$, így MYC minden szöge 60° -os, a háromszög szabályos (2 pont). Tehát $YC = MC = BM = AK$ (1 pont). Megfigyelve, hogy $AMC \sphericalangle = MCY \sphericalangle$, következik, hogy AM párhuzamos CY -nal (2 pont). Mivel az $AKYC$ négyszög két szemközti oldala, AK és YC párhuzamosak és egyenlők, ezért paralelogramma (2 pont). Ebből viszont következik, hogy $AC = KY$ (1 pont), de a tükrözés miatt $KY = BK$ (2 pont), tehát $BK = AC$ (1 pont). (Összesen max. 16 pont)



11. osztály: A mértani és számtani közép közti összefüggés, valamint a feladat adatai alapján

$$cd \leq |cd| = \sqrt{c^2 d^2} \leq \frac{c^2 + d^2}{2} = \frac{4 - a^2 - b^2}{2} \quad (5 \text{ pont}).$$

Most kimutatjuk, hogy

$$\frac{4-a^2-b^2}{2} \leq (2+a)(2+b)$$

és ezzel a feladat állítása igazolva lesz.

Egyenértékű átalakításokat végzünk:

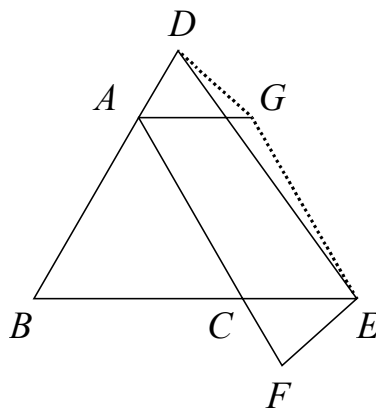
$$\frac{4-a^2-b^2}{2} \leq (2+a)(2+b) \Leftrightarrow 4-a^2-b^2 \leq 8+4a+4b+2ab \Leftrightarrow \quad (6 \text{ pont})$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 + b^2 + 2ab + 4(a+b) + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a+b)^2 + 2 \cdot (a+b) \cdot 2 + 2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a+b+2)^2 \quad (4 \text{ pont})$$

Mivel egyenértékű átalakításokkal igaz állításhoz jutottunk, így $cd \leq (2+a)(2+b)$ (**1 pont**), és ezzel állításunkat igazoltuk. (Összesen **max. 16 pont**)

12. osztály: Egészítsük ki az ACE háromszöget $ACEG$ paralelogrammává úgy, hogy GE párhuzamos AC -vel (**2 pont**)! Mivel $CE = AG$, $CF = AD$, $FCE\hat{=}DAG\hat{=}60^\circ$ (**3 pont**), ezért a DAG háromszög egybevágó az FCE háromszöggel (**2 pont**). Ebből következik, hogy $DG = FE$ (**2 pont**). Így $DE = AC + EF = GE + DG$ (**2 pont**), ami csak akkor lehetséges, ha G rajta van DE -n (**2 pont**). Így DE párhuzamos AC -vel (**2 pont**), ahonnan adódik, hogy $BDE\hat{=}60^\circ$ (**1 pont**).
Eltérő helyes megoldás ezzel arányosan pontozandó.



(Összesen max. 16 pont)