BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2023. MÁRCIUS 11.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	A B C	B C D E	1.	A B C E	B C D E	1.
2.	D	A B C E	2.	D	A	2.
3.	A B C D E	A B C D E	3.	C D	A B C D E	3.
4.	B D E	B C	4.	B	C D	4.
5.	A	A B	5.	B C E	C	5.
6.	C	A C D E	6.	A B C	C	6.
7.	A B C	B	7.	B	C	7.
8.	A C D	B E	8.	B D	A B C D	8.
9.	E	B	9.	A B C D E	A B	9.
Max.	*129+16 pont*	*133+16 pont*	*Max.*	*130+16 pont*	*129+16 pont*	*Max.*

9. osztály:
1. megoldás: Feltehetjük, hogy $x \geq y \geq z$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $y + z > x$. Így

$$(x+y)(y+z)(z+x) > (x+y)x(z+x) = x^3 + x^2y + x^2z + xyz > x^3 + x^2y + x^2z \geq x^3 + y^3 + z^3$$

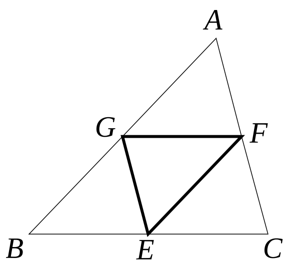
ami ellentmondás. Tehát nem létezik ilyen háromszög.

2. megoldás: A zárójelek felbontása, majd csoportosítás után használjuk a háromszög-egyenlőtlenségeket:

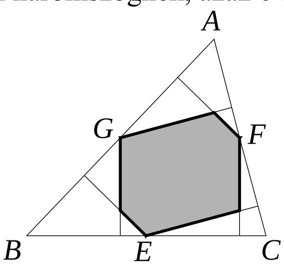
$$(x+y)(y+z)(z+x) = x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz > x^2 \cdot x + y^2 \cdot y + z^2 \cdot z + 0 = x^3 + y^3 + z^3$$

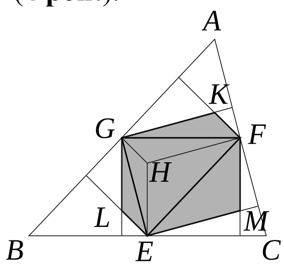
és így ellentmondásra jutottunk.
Mindkét esetben a háromszög-egyenlőtlenség használatára **4 pont** adható, a maradék **12 pont**ot arányosan kell megítélni.
(Összesen **max. 16 pont**)

10. osztály: Ha összekötjük egymással az oldalak felezőpontjait, *ABC* négy egybevágó háromszögre bomlik a középvonalak által,



így *EFG* területe negyede az eredeti háromszögnek, azaz 6 cm^2 (**4 pont**).





Legyen *H* az *ABC* háromszög köré írható kör középpontja. Mivel *GHEL*, *EHFM* és *GHFK* az oldalak párhuzamossága miatt paralelogrammák (**4 pont**), így átlóik felezik a területet (**3 pont**). Ezért *GLE*, *EMF* és *FKG* területeinek összege megegyezik *EFG* területével (**3 pont**). Így a hatszög keresett területe 6 + 6 = 12 cm^2 (**2 pont**).
(Összesen **max. 16 pont**)

11. osztály: Keresünk egy a valós számot úgy, hogy bármely *x* valós szám esetén igaz $f(x+a)=f(x)$ (***2 pont***).

Megmutatjuk, hogy $f(x+10)=f(x)$, tehát, hogy a függvény periódusa 10 (**2 pont**).

$f(x+10)=f((x+3)+7)=f(7-(x+3))=f(4-x)=f(2+(2-x))=f(2-(2-x))=f(x)$ (**12 pont**)

Elfogadjuk, ha egy csapat periódusnak 20-at, 30-at, 40-et, … talál.
Ha egy csapat nem talál jó periódust, de helyesen alkalmazza legalább mindkét tulajdonságot egy adottól eltérő változóra, akkor arra **4 pont**ot kaphat.
(Összesen **max. 16 pont**)

12. osztály Tegyük fel, hogy nem lehet kiválasztani három azonosra színezett számot úgy, hogy összegük 0 legyen! (**1 pont***)* Két esetet különböztetünk meg a szerint, hogy a 0 piros vagy zöld (**2 pont**).
a) Ha a 0 zöld, mivel 2023 is zöld, akkor –2023 piros. 2022 és –2023 is piros, és $1+2022+(-2023)=0$, ezért 1 zöld. Mivel $1+0+(-1)=0$, ezért –1 piros. $-1+2022+(-2021)=0$, így –2021 zöld. $(-2021)+2023+(-2)=0$, ezért –2 piros. $(-2)+2022+(-2020)=0$, így –2020 zöld; (**3 pont**) mindezt tovább folytatva a színűket megállapított számok egyszer csak összeérnek, így majd ugyanarról a számról megállapítjuk, hogy piros is és zöld is, ami természetesen lehetetlen. (**3 pont**)
b) Ha a 0 piros, mivel 0, és 2022 piros és $0+2022+(-2022)=0$, ezért –2022 zöld. Mivel −2022, 2023 zöld és $(-2022)+2023+(-1)=0$, ezért −1 piros. 0, −1 piros és mivel $0+(-1)+1=0$, ezért 1 zöld. $1+(-2022)+2021=0$, így 2021 piros. A 0, 2021 piros és $0+2021+(-2021)=0$, ezért −2021 zöld; −1, 2021 piros és $(-1)+2021+(-2020)=0$, ezért −2020 zöld. $1+2019+(-2020)=0$, így 2019 piros; 0, 2019 piros és $0+2019+(-2019)=0$, így −2019 zöld (**4 pont**) mindezt tovább folytatva a színűket megállapított számok egyszer csak összeérnek, így majd ugyanarról a számról megállapítjuk, hogy piros is és zöld is, ami természetesen lehetetlen (**2 pont**).
Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így hibás volt feltenni, hogy nem lehet kiválasztani három azonosra színezett egész számot, melyek összege 0. Tehát ki lehet választani három megfelelő számot, hogy összegük 0 legyen. (**1 pont**)
(Összesen **max. 16 pont**)