BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2022. FEBRUÁR 26.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**C**	**C**	1.	**D**	**B C D E**	1.
2.	**C**	**B C**	2.	**E**	**C**	2.
3.	**C**	**E**	3.	**B**	**C D**	3.
4.	**A D E**	**C**	4.	**A B D E**	**B D**	4.
5.	**A B C**	**D**	5.	**E**	**C**	5.
6.	**A B C D E**	**A B C D E**	6.	**A B C D E**	**C D E**	6.
7.	**B C D E**	**B E**	7.	**B D**	**A B C D**	7.
8.	**B D**	**B D**	8.	**C D E**	**B C D E**	8.
9.	**C D E**	**C**	9.	**C D E**	**A B C**	9.
Max.	*131+16 pont*	*124+16 pont*	*Max.*	*129+16 pont*	*132+16 pont*	*Max.*

9. osztály 10. feladat: Mivel
$(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+x^2+2xz+z^2=$
$=y^2+2yz+z^2 \Leftrightarrow x^2+xy+xz=yz$ (**4 pont**)
Ha az utóbbi egyenlőség mindkét oldalához hozzáadunk yz-t, akkor a baloldalt tényezőkre bontva azt kapjuk, hogy $(x+y)(x+z)=2yz$ (**5 pont**)
Ha x, y, z helyére páratlan egészeket írnánk, akkor a baloldalon mindkét zárójel páros volna (**2 pont**), így a szorzatuk 4 többszöröse lenne (**2 pont**), míg a jobboldal nem többszöröse 4-nek (**2 pont**), így nem léteznek megfelelő páratlan egészek (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály 10. feladat: Ha az adott egyenletben x helyébe a pozitív számok halmazán mindenütt értelmes $\frac{1}{x}$ -et helyettesítünk (**3 pont**), akkor az

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=3\cdot\frac{1}{x}+6 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

összefüggéshez jutunk. Az eredeti feltétellel együtt egy kétismeretlenes egyenletrendszert kaptunk az $f(x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ismeretlenekre (**1 pont**).

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+6$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=3\cdot\frac{1}{x}+6 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az első egyenletből vonjuk ki a második kétszeresét:

$$-3f(x)=3x-\frac{6}{x}-6 \qquad \textbf{(3 pont)}$$

azaz

$$f(x)=\frac{2}{x}-x+2. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Ekkor $f\left(\frac{1}{x}\right)=2x-\frac{1}{x}+2.$ Elvégezve az ellenőrzést, látható, hogy a kapott függvényre teljesül az adott feltétel (**2 pont**).

Tehát egyetlen olyan függvény létezik, az $f(x)=\frac{2}{x}-x+2$ amelyre teljesül a feladatban szereplő egyenlet.

(Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály 10. feladat: Ha *O* az *AB* felezőpontja, akkor ez egyben az *ABC* háromszög köré írt kör középpontja is (**1 pont**), így $AO = OC = OB$ (**1 pont**). Mivel *BOC* középponti szög és *K* a *BC* ív felezőpontja, ezért *OK* szögfelezője *COB* szögnek. Viszont COB egyenlőszárú, így a szárak szögfelezője egyben magasság is, tehát *OK* merőleges *BC*-re (**1 pont**). *AOC* egyenlőszárú háromszögben *ON* súlyvonal, így magasság is, tehát *ON* merőleges *AC*-re (**1 pont**). *EC* és *EA* tekinthető külső pontból körhöz húzott két érintőnek, ezért $EA = EC$ (**1 pont**), így *EAC* egyenlőszárú háromszögben *EN* súlyvonal egyben magasság is (**1 pont**). Mivel *AC*-re *N*-ben *NE* és *NO* is merőleges, ezért *E*, *N* és *O* pontok kollineárisak (**1 pont**). *AC* és *OK* is merőleges *BC*-re, így ezek párhuzamosak, és mivel *EN* merőleges *AC*-re, ezért *EO* is merőleges *OK*-ra (**1 pont**).
EAOC négyszög *A* és *C*-nél lévő szögei derékszögek, ezért húrnégyszög (**1 pont**), így a szelőszakaszok tétele szerint $NA \cdot NC = NE \cdot NO$ (**1 pont**).
Az ábra körében *AC* és *MK* húrok, így $NA \cdot NC = NM \cdot NK$ (**1 pont**). A két utóbbi egyenlőségből következik, hogy $NM \cdot NK = NE \cdot NO$, ahonnan $\frac{NM}{NO} = \frac{NE}{NK}$ (**1 pont**). Figyelembe véve még, hogy az *NEM* és *NKO* háromszögek *ENM* és *KNO* szögei csúcsszögek (**1 pont**), tehát egyenlők, így e két háromszögben két-két oldal aránya és az általuk közrezárt szögek egyenlők, amiből következik, hogy az *NEM* háromszög hasonló az *NKO* háromszöggel (**1 pont**). A két háromszög hasonlóságából így *EMN* szög egyenlő *KON* szöggel (**1 pont**), ami derékszög. Tehát $EM \perp MK$ (**1 pont**).
Eltérő helyes megoldás arányosan pontozandó. (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály 10. feladat: A húrok akkor metszik egymást, ha a pontok a körvonalon *ACBD* sorrendben követik egymást valamelyik körüljárási irányban (**2 pont**). Tegyük le a pontokat tetszőleges helyre a körvonalon. Ezt megtehetjük, mert az elhelyezkedés nem befolyásolja a metszést, csak az, hogy melyik pontnak melyik nevet adtuk (**2 pont**). Az egyik letett pontot nevezzük *A*-nak. Az, hogy melyiket, még mindig nem befolyásolja a metszést (**2 pont**). Ha most az *A* egyik szomszédját jelöljük *B*-vel, akkor nem metszi egymást az *AB* és *CD* szakasz (**2 pont**), ha a „szemköztit", akkor lesz metszéspont (**2 pont**). A *B* kiválasztását véletlenszerűen tehetjük meg, vagyis 2/3 eséllyel választhatunk *A*-val szomszédos pontot (**3 pont**). Ezek szerint 1/3 a valószínűsége, hogy a húrok metszik egymást (**3 pont**).
Eltérő helyes megoldást a fentivel arányosan kell pontozni. (Összesen **max. 16 pont**.)