A rendezvény támogatói:

BÉKÁSMEGYERI VERES PÉTER GIMNÁZIUM

ÓBUDA-BÉKÁSMEGYER ÖNKORMÁNYZATA

BME MATEMATIKA INTÉZET

„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába."

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®

BOLYAI FARKAS

2021/22.

ORSZÁGOS DÖNTŐ

11. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS akadémikus, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

A feladatsorok lektorálója:
NAGY KARTAL egyetemi hallgató

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

Az 1-9. feladatok megoldását a válaszlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. Legtöbb hány olyan nyolcjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy pontosan annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke? (Példa: 33414434.)

(A) *513* **(B)** *532* **(C)** *533* **(D)** *541* **(E)** *560*

2. Ha $a=\log_7 8,\ b=\log_7 9,\ c=\log_8 9,$ akkor

(A) $a<b<c$ **(B)** $b<c<a$ **(C)** $a<c<b$ **(D)** $c<b<a$ **(E)** $c<a<b$

3. Az alábbiak közül c mely értékére lehet $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ is gyöke az $5x^2-3x+c=0$ egyenletnek, ahol α egy szöget jelent.

(A) *-2* **(B)** *-1,6* **(C)** *-1* **(D)** *-0,4* **(E)** *1*

4. Az alábbiakból pontosan hány részre oszthatják a síkot valamely szabályos sokszög oldalegyenesei?

(A) *67* **(B)** *73* **(C)** *86* **(D)** *92* **(E)** *99*

5. Egy 3×3×3-as kockarács egyik sarokkockájába egy egeret teszünk, a középsőbe pedig egy darab sajtot. Az egér bolyong a sajtot keresve: minden lépésben véletlenszerűen lép át valamelyik szomszédos kockába (amelyikkel van közös lapja). Várhatóan hány lépésben találja meg a sajtot?

(A) *17* **(B)** *18* **(C)** *19* **(D)** *20* **(E)** *21*

6. Ha n olyan pozitív egész, amelyre $2n+1$ is és $3n+1$ is négyzetszám, akkor n biztosan osztható…

(A) *4-gyel* **(B)** *8-cal* **(C)** *10-zel* **(D)** *20-szal* **(E)** *40-nel*

7. Legyen az ABC háromszögben $AB=AC$. A $CAB\sphericalangle$, illetve $ABC\sphericalangle$ szögek szögfelezői a BC, illetve CA oldalakat rendre a D, illetve E pontokban metszik. Legyen K az ADC háromszög beírt körének a középpontja. Tegyük fel, hogy $BEK\sphericalangle=45°$. Hány fokos lehet ekkor a CAB szög?

(A) *45°* **(B)** *60°* **(C)** *75°* **(D)** *90°* **(E)** *105°*

8. Egy számítógépes játékban minden egyes játék alkalmával egész pontszámot érhetünk el. A legjobb 30 eredményt számon tartó listán a játék megalkotója egy-egy fantázianév mellett a 30, 29, 28, ..., 1 pontszámokat tüntette fel. Egy játék során elért eredményünk - saját nevünk alatt - akkor kerül fel a listára, ha pontszámunk nagyobb, mint az aktuális listán szereplő legkisebb pontszám, amely ezután értelemszerűen lekerül a listáról. Egyenlő pontszámok esetén az utoljára felkerült pontszám kerül le a listáról. A besorolás ``alulról" történik, tehát csak azokat az eredményeket fogjuk megelőzni a listán, amelyeknél nagyobb pontszámot értünk el. Feltéve, hogy minden egyes játék után feljutunk a listára, az alábbiakból hány játék lejátszása lehet elég ahhoz, hogy biztosan a mi nevünk szerepeljen a listán valamennyi pontszám mellett?

(A) *365* **(B)** *400* **(C)** *465* **(D)** *564* **(E)** *900*

9. Egy 13×13-as táblázat mezőibe úgy írtak számokat, hogy a 13 sor és a 13 oszlop mindegyikében ugyanannyi a számok összege. Az alábbiakból a táblázatban hány számnak a megváltoztatásával érhető el az, hogy a 26 darab összeg között ne legyenek egyenlők?

(A) *15* **(B)** *16* **(C)** *17* **(D)** *18* **(E)** *19*

A következő feladatot a válaszlap kijelölt helyén oldjátok meg!

10. Az AB átfogójú ABC derékszögű háromszög köré írt kör BC rövidebbik ívének felezőpontja legyen K és AC befogójának felezőpontja N. A körhöz A és C pontban húzott érintők metszéspontja legyen E, és KN körrel való metszéspontja M. Mutassátok meg, hogy $EM\perp MK$!