A rendezvény támogatói:

BÉKÁSMEGYERI VERES PÉTER GIMNÁZIUM

ÓBUDA-BÉKÁSMEGYER ÖNKORMÁNYZATA

BME MATEMATIKA INTÉZET

„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába."

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®

BOLYAI FARKAS

2020/21.

KÖRZETI FORDULÓ

12. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS akadémikus, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

A feladatsorok lektorálója:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

Az 1-13. feladatok megoldását a honlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. Egy természetes szám négyzetének utolsó két jegyét felcserélve az eggyel nagyobb szám négyzetét kapjuk. Összesen hány ilyen szám létezik?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

2. Egy szabályos háromszöget a középpontja körül pozitív irányba elforgatunk először $3°$-kal, azután tovább forgatjuk $9°$-kal, majd $27°$-kal, a *k*-adik lépésben 3^k fokkal. Maximum hányféle különböző helyzetet vehet fel a háromszög az elforgatások eredményeképpen? (Két helyzet akkor nem különböző, ha a két háromszög teljesen fedi egymást.)

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *5-nél több*

3. Az ötös lottó sorsolásnak összesen hány olyan különböző kimenetele lehetséges, amelynél a nyerő számok számtani sorozatot alkotnak?

(A) *956* **(B)** *960* **(C)** *966* **(D)** *968* **(E)** *986*

4. Egy tálba egymás után felütünk tíz darab tojást. A tojások közül kettő romlott, de ez csak a tálba kerüléskor derül ki. A romlott tojások az összes előttük feltört tojást használhatatlanná teszik. A tálat ilyenkor kimossuk és a megmaradt tojásokkal folytatjuk az eljárást. Ha rendszeresen így járunk 10 tojással, akkor a jó tojásoknak átlagosan hányadrésze megy ily módon veszendőbe?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

5. Egy kúpba (csúcsával lefelé tartva) vizet töltünk, így a víz 10 *cm* magasan áll benne. Nyílását lezárva alaplapjára állítjuk a kúpot, így most 2 *cm* magasan áll benne a víz. Hány centiméter magas ez a kúp?

(A) *13 cm-nél kevesebb* **(B)** *13 cm-nél több* **(C)** *14 cm-nél kevesebb*
(D) *14 cm-nél több* **(E)** *15 cm-nél kevesebb*

6. Egy tetraéder alakú kartondobozt felvágtunk az egyik csúcsából induló három éle mentén, majd az „elváló" lapokat leterítettük a fenti csúccsal szemközti lap síkjába. Így egy 30 *cm* oldalú négyzetet kaptunk. Hány cm^3 lehetett ennek a tetraédernek a térfogata?

(A) *1000* cm^3*-nél kevesebb.* **(B)** *1000* cm^3*-nél több.*
(C) *1100* cm^3*-nél kevesebb.* **(D)** *1100* cm^3*-nél több.*
(E) *1200* cm^3*-nél több.*

7. Egy ötszög csúcspontjainak koordinátái $A(0;0)$, $B(11;0)$, $C(11;2)$, $D(6;2)$, $E(0;8)$. Ha annak az egyenesnek az egyenlete, amelyik párhuzamos az *y* tengellyel és felezi az ötszög területét $x = a$, akkor

(A) $a > 2{,}5$ **(B)** $a < 3$ **(C)** $a > 3$ **(D)** $a < 3{,}5$ **(E)** $a > 3{,}5$

8. A kocka egyik élének *K* felezőpontjából olyan érintőt húzunk a beírt gömbhöz, amely metszi az egyik szemközti kitérő élt. Az érintési pont legyen *E*, a metszéspont legyen *F*. Az alábbiakból mennyi lehet a $KE : EF$ arány?

(A) *1:2* **(B)** *2:3* **(C)** *3:4* **(D)** *4:5* **(E)** *5:6*

9. Egy szabályos dobókockát dobálunk egymás után addig, amíg a kapott számok *S* összege túl nem lépi a 100-at. Az alábbiakból mi az *S* legvalószínűbb értéke?

(A) *101* **(B)** *102* **(C)** *103* **(D)** *104* **(E)** *105*

10. Az (a_n) sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1 = k \text{ (pozitív egész)}, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{ha } a_n \text{ páros} \\ a_n + 5, & \text{ha } a_n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Az alábbiak közül *k* mely értéke estén fordul elő az 1 az (a_n) sorozat tagjai között?

(A) *2018* **(B)** *2019* **(C)** *2020* **(D)** *2021* **(E)** *2022*

11. Egy sokszög csúcsainak halmaza olyan (x, y) koordinátájú pontokból áll, amelyekre *x* és *y* pozitív egészek, továbbá *x* osztója $2y+1$-nek és *y* osztója $2x+1$-nek. Legfeljebb mekkora lehet egy ilyen sokszög területe?

(A) *4* **(B)** *8* **(C)** *12* **(D)** *20* **(E)** *28*

12. Öt jóbarát észrevette, hogy ha elosztják a saját könyveik számát a saját könyveik számában található számjegyek összegével, akkor eredményül mind az öten ugyanazt az egész számot, 13-at kapják. Ekkor…

(A) *előfordulhat, hogy mind az ötnek más mennyiségű könyve van.*
(B) *biztosan van közöttük kettő, akinek ugyanannyi könyve van.*
(C) *biztosan van közöttük három, akinek ugyanannyi könyve van.*
(D) *biztosan van közöttük négy, akik közül kettőnek-kettőnek ugyanannyi könyve van.*
(E) Az *előzőek közül pontosan 2 válasz igaz.*

13. Az alábbiak közül *n* mely értékére nem igaz az, hogy bárhogyan is írjuk egy *n* csúcsú konvex test csúcsaira a -1, $+1$ számokat, lesz a testnek olyan csúcsa, hogy az ebbe futó élek másik végpontjaihoz írt számok szorzata $+1$.

(A) *12* **(B)** *13* **(C)** *2019* **(D)** *2020* **(E)** *2021*