A rendezvény támogatói:

BÉKÁSMEGYERI VERES PÉTER GIMNÁZIUM

ÓBUDA-BÉKÁSMEGYER ÖNKORMÁNYZATA

BME MATEMATIKA INTÉZET

„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába."

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®

BOLYAI FARKAS

2020/21.

ORSZÁGOS DÖNTŐ

10. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS akadémikus, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

A feladatsorok lektorálója:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

Az 1-9. feladatok megoldását a honlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. Tizennyolc gyerek megoldotta a KöMaL legutóbbi számának egy-egy különböző feladatát, és csak azt az egyet. A megoldásokat elektronikus levelezéssel (e-mailen keresztül) akarják megbeszélni. Az alábbiak közül összesen hány e-mail egymásnak való elküldése után fordulhat elő, hogy mindegyikük megtudja mind a 18 megoldást ezen az úton? (Minden e-mail annyiszor számít, ahány embernek küldik.)

(A) *18* **(B)** *24* **(C)** *34* **(D)** *36* **(E)** *40*

2. A művelethalmozók egy új, „$*$”-gal jelölt műveletet vezettek be, amelyre minden a, b, c valós szám esetén igaz az $a*a=0$ és $a*(b*c)=(a*b)+c$ ahol a „+” a szokásos összeadás jele. Az alábbiakból mennyi az eredménye a $2021*2020$ műveletnek?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *1010* **(D)** *4041* **(E)** *Az előzőek egyike sem.*

3. Az $ABCD$ konvex négyszög területe $\frac{1}{2}cm^2$, és $AB+BD+DC$ legfeljebb 2 cm. Hány cm lehet az AC átló hossza?

(A) *1,25* **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** *1,5* **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** *2*

4. Ha az $f(x)=ax+b$ függvény olyan, hogy minden valós x-re $f(f(x))=x$, akkor milyen geometriai transzformációja lehet $f(x)$ a számegyenesnek?

(A) *helybenhagyás (identikus leképezés)*

(B) $\vec{0}$*-tól különböző vektorral való eltolás*

(C) $-\frac{b}{2}$*-re való tükrözés (ha* $b\neq 0$*)*

(D) $\frac{b}{2}$*-re való tükrözés (ha* $b\neq 0$

(E) b-re való tükrözés *(ha* $b\neq 0$*)*

5. Adott a térben négy különböző pont, *A, B, C* és *D*. Tudjuk, hogy van a térnek olyan egybevágósági transzformációja, amely *A*-t és *B*-t felcseréli, *C*-t és *D*-t helybenhagyja; van továbbá egy egybevágósági transzformáció, amely *A*-t *B*-be, *B*-t *C*-be, *C*-t *D*-be és *D*-t *A*-ba viszi. Hány fokos lehet ekkor az *ABC* szög?

(A) *22,5°* **(B)** *30°* **(C)** *45°* **(D)** *60°* **(E)** *75°*

6. Az *a, b, c* egész számok legnagyobb közös osztója 1. Az (*a,b,c*) számhármast más számhármasokra cserélhetjük úgy, hogy minden lépésben az egyik számot növeljük vagy csökkentjük a számhármas egy másik elemének valamilyen többszörösével. Az *a, b, c* számok megválasztásától függetlenül, az alábbiak közül hány lépésben juthatunk el így biztosan az (1,0,0) számhármashoz?

(A) *5* **(B)** *7* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

7. Adott egy r sugarú kör és a kerületén az *A, B, C* különböző pontok úgy, hogy $AB=AC<r$. Legyen még D az a pont a kör belsejében, amelyre ABD szabályos háromszög. A CD félegyenes a kört E-ben metszi. Mennyi lehet ekkor DE?

(A) *0,8r* **(B)** *0,9r* **(C)** *r* **(D)** *1,1r* **(E)** *1,2r*

8. Legyen S = {1, 2, 3, ..., 280} (1-től 280-ig a pozitív egészek). A legkisebb n egész szám, amelyre igaz az, hogy S minden n elemű részhalmaza tartalmaz 5 olyan számot, amelyek páronként relatív prímek, …

(A) *kevesebb 150-nél.* **(B)** *több 150-nél.* **(C)** *kevesebb 200-nál.* **(D)** *több 200-nál.* **(E)** *legalább 210.*

9. Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz − egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz − valamelyikébe oly módon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.
A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindkettőből kivesz egy-egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.
Összesen hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

(A) *1* **(B)** *6* **(C)** *12* **(D)** *18* **(E)** *25*