A rendezvény támogatói:

BÉKÁSMEGYERI VERES PÉTER GIMNÁZIUM

ÓBUDA-BÉKÁSMEGYER ÖNKORMÁNYZATA

BME MATEMATIKA INTÉZET

„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába."

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®

BOLYAI FARKAS

2020/21.

ORSZÁGOS DÖNTŐ

9. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS akadémikus, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

A feladatsorok lektorálója:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

Az 1-9. feladatok megoldását a honlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. A 2-esnek melyik az a legnagyobb kitevője, amivel maradék nélkül osztható $10^{20}-2^{20}$?

(A) *21* **(B)** *22* **(C)** *23* **(D)** *24* **(E)** *25*

2. Legtöbb hány különböző megoldása van a valós számhármasok halmazán az egyetlenrendszernek?

$$\begin{cases} x-y\ge z, \\ x^2+4y^2+5=4z \end{cases}$$

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *4* **(E)** *Végtelen sok.*

3. Andris megnevezett néhány olyan különböző síkot, amelyek egy adott kockának legalább 3 élfelező pontját tartalmazzák. Az alábbiak közül hány síkot nevezhetett meg Andris?

(A) *56* **(B)** *60* **(C)** *81* **(D)** *110* **(E)** *220*

4. Legtöbb hány különböző megoldása van az egész számpárok halmazán az $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$ egyenletnek?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

5. Robinson Crusoe egy kör alakú tóban fürdött, amikor annak partján megjelent egy kannibál, aki el akarta őt kapni. Robinson tudta, hogy a kannibál négyszer olyan gyorsan tud futni a parton, mint ahogyan ő a vízben úszik, viszont a parton Robinson sokkal gyorsabb a kannibálnál. Így tehát, ha úgy tud partot érni, hogy az emberevő ne álljon pontosan ott ahol ő partot ér, akkor elszaladhat. Melyik állítás igaz ekkor az alábbiak közül? (Robinsonnak mindenképp ki kell jönnie a partra, mert a végtelenségig nem maradhat a tóban.)

(A) *Bárhogy is úszik Robinson, a kannibál el tudja őt kapni.*

(B) *Bárhogy is mozog a parton a kannibál, Robinson ki tud úgy úszni, hogy elszaladhasson.*

(C) *Létezik olyan mozgása a kannibálnak, hogy elkapja Robinsont.*

(D) *Létezik olyan mozgása Robinsonnak, hogy megszabaduljon a kannibáltól.*

(E) *Az előzőekből pontosan egy válasz helyes.*

6. Legtöbb hány olyan tízes számrendszerbeli n szám létezik, melyre $n=S^2(n)-S(n)+1$, ahol $S(n)$ az n szám jegyeinek összegét jelöli?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *végtelen sok*

7. Egy tesztvizsga 4 kérdésből állt, mindegyik kérdésre 3 előre megadott lehetséges válasszal. Az alábbiakból hányan vehettek részt ezen a vizsgán, ha bármely 3 vizsgázóhoz találtak olyan kérdést, amelyre mindhárman más-más választ jelöltek meg helyesnek?

(A) *7* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

8. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

(A) Van olyan egész szám, amelyet 2021-gyel osztva, a tizedesvessző után valahol egymás után négy darab 9-est kapunk.

(B) Ha 10 csapat körmérkőzést játszott, mindegyik pár pontosan egyszer mérkőzött, és a mérkőzések nem végződhettek döntetlennel, valamint tudjuk, hogy győzelemért 1 pont járt, vereségért 0, akkor a csapatok által megszerzett pontszámok négyzetösszege nem lehetett több 285-nél.

(C) Rajzolható olyan *ABCD* deltoid, amelynek *AB* és *BC* oldala, valamint *AC* és *BD* átlói 1 egység hosszúak, és a deltoid elvágható egy egyenessel két kisebb átmérőjű részre. (Egy alakzat átmérője a két legtávolabbi pontjának távolsága.)

(D) Két *érdekes szám* szorzata mindig *érdekes*, ha egy természetes számot akkor mondunk *érdekesnek*, amikor előállítható x^2+2y^2 alakban, ahol x, y egészek.

(E) Az *ABC* háromszög *CA* és *CB* oldalaira kifelé írt *CADE* és *CBFG* négyzetek középpontjai legyenek O_1 és O_2. Az *AB* és *EG* szakaszok felezőpontjai, valamint O_1 és O_2 egy négyzet csúcsai, függetlenül attól, hogy *ABC* milyen típusú háromszög.

9. Antal 100 gyufásdobozt megszámoz 1-től 100-ig, és mindegyikbe tetszés szerinti számú gyufát tesz. Bea tetszőlegesen kiválaszt ezekből 15 dobozt, erre Antal megszámolja a kiválasztott dobozokban levő gyufákat (úgy, hogy Bea ezt ne lássa), és megmondja, hogy abban a 15 dobozban együttesen páros, vagy páratlan számú gyufa van-e. Bea ezt a kérdezési lépést akárhányszor megismételheti. Az alábbiak közül hány lépés után találhatja ki biztosan Bea, hogy az 1-es számú dobozban páros vagy páratlan sok gyufa van?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*