BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2020. FEBRUÁR 22.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**E**	**D**	1.	**C**	**C**	1.
2.	**A B**	**C**	2.	**A B C**	**D**	2.
3.	**B C E**	**C**	3.	**A B C D E**	**C D E**	3.
4.	**A B C**	**B D**	4.	**A D**	**A D**	4.
5.	**A C E**	**A D**	5.	**A B**	**A D**	5.
6.	**B C D**	**B D E**	6.	**A B C**	**B D E**	6.
7.	**B C E**	**A B C D E**	7.	**A B C**	**C**	7.
8.	**A B C**	**B D E**	8.	**A C**	**C D**	8.
9.	**A B**	**A B**	9.	**D E**	**D E**	9.
Max.	*131+16 pont*	*128+16 pont*	*Max.*	*131+16 pont*	*125+16 pont*	*Max.*

9. osztály 10. feladat: Legyen a 10 egymást követő pozitív egész n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+9$. Ekkor a tíz szám összege: $n+(n+1)+\ldots+(n+9)=10n+45$, (**2 pont**) és a négyzetösszegük:

$n^2+(n+1)^2+\ldots+(n+9)^2=10n^2+2n+4n+6n+\ldots 18n+1^2+2^2+\ldots+9^2=10n^2+90n+285$ (**2 pont**)

tehát a $\dfrac{10n^2+90n+285}{10n+45}$ tört értéke egész (**1 pont**). $\dfrac{10n^2+90n+285}{10n+45}=n+4+\dfrac{n+21}{2n+9}$ (**2 pont**), így az $\dfrac{n+21}{2n+9}$-nek egésznek kell lennie (**1 pont**).

Mivel az n pozitív egész, ezért $n+21<6n+27$, azaz $\dfrac{n+21}{2n+9}<3$, így csak $\dfrac{n+21}{2n+9}=1$ (**1 pont**) vagy $\dfrac{n+21}{2n+9}=2$ lehetséges (**1 pont**).

Az első esetben $n=12$ (**2 pont**), a második esetben pedig $n=1$ (**2 pont**), valóban pozitív egészek.
Tehát a 10 egymást követő pozitív egész az 1, 2, 3, ..., 10 (**1 pont**) vagy a 12, 13, 14, ..., 21 (**1 pont**).
(Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály 10. feladat: Mivel az egyenlet bal oldala mindig páros (**1 pont**), ezért z is páros, tehát z^3 biztosan osztható 8-cal (**2 pont**). Így $8\,|\,1+2^x+3^y$ teljesül (**1 pont**). 3^y 8-cal osztva csak 1-et vagy 3-at adhat maradékul (2 **pont**), így 2^x-nek 8-cal osztva 6 vagy 4 maradékot kell adnia (**2 pont**). De 2^x egy 2-hatvány, ezért e két lehetőség közül csak az utóbbi teljesülhet, és ekkor $x=2$ (**2 pont**). Tehát az egyenlet $5+3^y=z^3$ alakra hozható (**1 pont**). z^3 9-cel osztva 0-t, 1-et vagy 8-at adhat maradékul (**2 pont**), így 3^y nem lehet 9-cel osztható (**1 pont**). Tehát csak $y=1$ lehet (**1 pont**), ebből $z^3=5+3=8$, vagyis $z=2$ (**1 pont**). Így az egyenlet egyetlen megoldása az $x=2$, $y=1$, $z=2$. *Ettől eltérő helyes megoldást ezzel arányosan kell pontozni.* (Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály 10. feladat: 1. megoldás: Mivel $f(x)=x^2+bx+c=(x-m_1)(x-m_2)$ (**3 pont**) és $g(x)=x^2+px+q=(x-k_1)(x-k_2)$ (**3 pont**), ezért $f(k_1)+f(k_2)=(k_1-m_1)(k_1-m_2)+(k_2-m_1)(k_2-m_2)$ (**2 pont**) és $g(m_1)+g(m_2)=(m_1-k_1)(m_1-k_2)+(m_2-k_1)(m_2-k_2)$ (**2 pont**). Így $f(k_1)+f(k_2)+g(m_1)+g(m_2)=$
$=(k_1-m_1)(k_1-m_2-m_1+k_2)+(k_2-m_2)(k_1-m_2-m_1+k_2)=(k_1-m_2-m_1+k_2)^2\ge 0$ (**6 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

2. megoldás: Behelyettesítéssel $f(k_1)+f(k_2)=k_1^2+bk_1+c+k_2^2+bk_2+c=k_1^2+k_2^2+b(k_1+k_2)+2c=$
$=(k_1+k_2)^2-2k_1k_2+b(k_1+k_2)+2c$ (**3 pont**). Ebbe a Viéte-formulából ismert $k_1+k_2=-p$ (**2 pont**) és $k_1k_2=q$ (**2 pont**) értékeket beírva, azt kapjuk, hogy $f(k_1)+f(k_2)=p^2-2q-bp+2c$ (**2 pont**). Hasonló úton kaphatjuk, hogy $g(m_1)+g(m_2)=b^2-2c-pb+2q$ (**2 pont**). Így $f(k_1)+f(k_2)+g(m_1)+g(m_2)=$
$=p^2-2q-bp+2c+b^2-2c-pb+2q=p^2-2bp+b^2=(p-b)^2\ge 0$ (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály 10. feladat: $n>4$–re, ha a lehetséges összeg első tagja 1, akkor a többi tag a_{n-1}-féle lehet (**1 pont**), ha az első tag 3, akkor a többi a_{n-3}-féle lehet (**1 pont**), ha pedig az első tag 4, akkor a többi a_{n-4}-féle lehet (**1 pont**). Tehát

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezzel a rekurziós képlettel tovább számolva, kapjuk, hogy $a_6=9$, $a_7=15$, $a_8=25$, $a_9=40$, $a_{10}=64$, … és észre vehető, hogy $a_2=1$, valamint $a_4=4$, ami megerősíti azt a sejtést, hogy a_{2n} mindig négyzetszám lesz – így a_{2020} is (**1 pont**). Ennél azonban többet is beláthatunk: az 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 8^2, … sorozatban az alapok mindegyike az előző két alap összege. Az $f_1=1$, $f_2=1$, $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ ($n\geq 1$) sorozat az úgynevezett Fibonacci-sorozat (**2 pont**).

Be fogjuk bizonyítani, hogy $a_{2n}=f^2{}_{n+1}$ (**2 pont**), és $a_{2n+1}=f_{n+1}\cdot f_{n+2}$ (**2 pont**). Teljes indukciót használunk: $n=1$-re és $n=2$-re az állítás igaz, és lássuk be, hogy $(n+1)$-re is igaz ez a két összefüggés. Ekkor $a_{2(n+1)}=a_{2(n-1)}+a_{2n-1}+a_{2n+1}=f^2{}_n+f_nf_{n+1}+f_{n+1}f_{n+2}=f_n(f_n+f_{n+1})+f_{n+1}f_{n+2}=f_nf_{n+2}+f_{n+1}f_{n+2}=f_{n+2}(f_n+f_{n+1})=$ $=f^2{}_{n+2}$ (**2 pont**) és $a_{2n+3}=a_{2n-1}+a_{2n}+a_{2n+2}=f_nf_{n+1}+f^2{}_{n+1}+f^2{}_{n+2}=f_{n+1}(f_n+f_{n+1})+f^2{}_{n+2}=f_{n+1}f_{n+2}+f^2{}_{n+2}=$ $=f_{n+2}(f_{n+1}+f_{n+2})=f_{n+2}f_{n+3}$ (**2 pont**) tehát az állítás minden *n*-re igaz. Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy a_n minden páros *n*-re négyzetszám, így a_{2020} is az (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)