BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2019. JANUÁR 11.

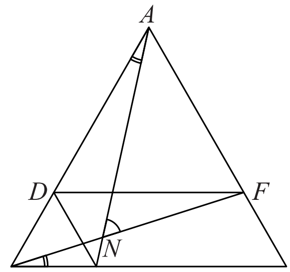
MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**B**	**C**	1.	**C**	**C**	1.
2.	**B**	**A B C D E**	2.	**B E**	**A B C D E**	2.
3.	**A B**	**A B**	3.	**A E**	**A C E**	3.
4.	**B C**	**D**	4.	**A B C D**	**B C D**	4.
5.	**A E**	**B C D**	5.	**A B**	**A D**	5.
6.	**A B C D E**	**A E**	6.	**A C**	**A B C D E**	6.
7.	**A C E**	**A C**	7.	**A B C D E**	**B C E**	7.
8.	**B C D**	**A B C**	8.	**A E**	**C E**	8.
9.	**A B C**	**A B C D E**	9.	**D E**	**B**	9.
10.	**A B C**	**A B**	10.	**D E**	**C D E**	10.
11.	**A B C**	**B C D**	11.	**E**	**C D**	11.
12.	**B E**	**B**	12.	**B D**	**A B C D**	12.
13.	**A B C D E**	**A B C D**	13.	**B**	**B**	13.
Max.	*191+16 pont*	*190+16 pont*	*Max.*	*184+16 pont*	*191+16 pont*	*Max.*

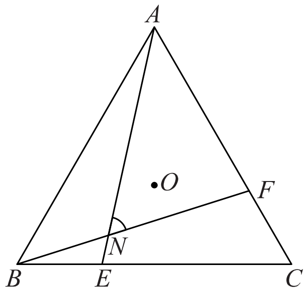
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2019. JANUÁR 11.

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

9. osztály:



1. megoldás: A feltételek miatt *CEDF* paralelogramma (**2 pont**), ezért $CF = ED$ (**1 pont**). Ugyanakkor a *BED* háromszög szabályos (**2 pont**), így $BE = ED$. Mindebből következik, hogy $BE = CF$ (**2 pont**).
Az *ABE* és *BCF* háromszögek egybevágók, mert két oldaluk és az általuk közbezárt szög megegyezik (**2 pont**), így $CBF\measuredangle = BAE\measuredangle$ (**1 pont**). Mivel egy háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, ezért az *NAB* háromszög külső szögére teljesül, hogy $ANF\measuredangle = ABN\measuredangle + BAN\measuredangle = 60° - CBF\measuredangle + BAN\measuredangle = 60°$ (**6 pont**).
(Összesen **max. 16 pont**.)



2. megoldás: $BE = CF$ -et az előző módon igazoljuk (**7 pont**). Legyen az *ABC* szabályos háromszög középpontja *O*, majd forgassuk el *O* körül 120°-kal a háromszöget (**3 pont**). Ekkor az *A* pont *B*-be, a *B* pont *C*-be, a *C* pont pedig *A*-ba megy át, így az *AB* oldal *BC*-be, a *BC* oldal *CA*-ba megy át (**1 pont**). Mivel $BE = CF$, így a forgatással *AE* képe *BF* lesz (**2 pont**). Ebből következik, hogy az $ENF\measuredangle$ nagysága megegyezik a forgatás szögével, vagyis $ENF\measuredangle = 120°$ (**1 pont**), így $ANF\measuredangle = 180° - ENF\measuredangle = 60°$ (**2 pont**).
(Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály:

Az egyenlőtlenség felírható $ab + bc + ca < 2c^2$ (**1 pont**) vagy $ab + bc + ca < c^2 + c^2$ alakban. Ennek jobb oldalán az egyik c^2 -et Pitagorasz tételével $a^2 + b^2$ -re cserélhetjük, így az $ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2$ alakot kapjuk (**3 pont**).

Mindkét oldalt 2-vel szorozva az eredetivel egyenértékű következő állítást kapjuk: $2ab + 2bc + 2ca < 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ (**3 pont**). A tagokat a jobb oldalra rendezve, majd csoportosítva: $0 < a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$ (**4 pont**), ami ekvivalens a $0 < (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ állítással (**2 pont**).

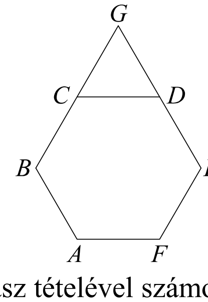
A legutolsó állítás igaz, hiszen a jobb oldalon mindhárom teljes négyzet értéke nemnegatív, továbbá az utolsó két tag biztosan pozitív, hiszen az átfogó nagyobb a befogóknál (**2 pont**). Mivel minden átalakításunk ekvivalens volt, ezért az eredeti, bizonyítandó állítás is igaz (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály:

Tekintsük a következő átalakításokat (ahol *n* tetszőleges 1-nél nagyobb egész): $a_{n+1} - a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + 1 - a_n =$
$= 1 - a_n + (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n = 1 - a_n + (a_n - 1) \cdot a_n = 1 - 2a_n + a_n^2 = (1 - a_n)^2$, vagyis négyzetszám.
Az egyenlőségsor első három lépése egyenként **4-4 pontot** ér, az utolsó két lépés pedig egyenként **2-2 pontot** ér. (Összesen **max. 16 pont**.)
Ha egy csapat csak konkrét számokkal kísérletezik, és igaznak találja az állítást, arra összesen 1 pontot kaphat.

12. osztály:

A szabályos hatszög minden belső szöge 120°-os (**1 pont**), ezért ábránkon a hatszög *C*-nél és *D*-nél lévő külső szögei 60°-osak (**2 pont**), tehát a *GCD* háromszög szabályos (**1 pont**). Ezáltal $GC = CD = 1$ (**2 pont**), így az *ABG* háromszögben $GB = 2$, $AB = 1$ és $ABG\measuredangle = 120°$ (**2 pont**). Az *AG* szakasz hosszát meghatározhatjuk a koszinusztétel segítségével (**2 pont**): $AG^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 1 + 4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + 2 = 7$, amiből következik, hogy $AG = \sqrt{7}$ (**4 pont**).



A szerkesztés lépései tehát: meghosszabbítjuk *C*-n túl *BC*-t, valamint *D*-n túl *ED*-t, míg az egyenesek metszik egymást *G*-ben (**1 pont**), majd *A*-t összekötjük *G*-vel, és így megkaptuk a kívánt hosszúságú *AG* szakaszt (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

Megjegyzés: A számítás történhetett volna úgy is, hogy először *AE*-t számoljuk ki az *AEF* 30°-os hegyesszögű egyenlő szárú háromszögben, majd az *E*-nél derékszögű *AEG* háromszögből Pitagorasz tételével számoljuk ki *AG*-t.