BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2019. FEBRUÁR 23.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	A B C D	A B D	1.	A B C D E	C	1.
2.	A B C D E	C E	2.	B D	C E	2.
3.	A	B D	3.	C E	D	3.
4.	B	C	4.	C E	C D	4.
5.	C D	B D	5.	E	C D E	5.
6.	B E	B	6.	A B C	D	6.
7.	B D	C D E	7.	C D E	A B C	7.
8.	B D E	B C E	8.	A B	C D E	8.
9.	C D E	B E	9.	D	E	9.
Max.	*131+16 pont*	*127+16 pont*	*Max.*	*129+16 pont*	*125+16 pont*	*Max.*

9. osztály 10. feladat: A $8(s-a)(s-b)(s-c)=2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ összefüggés alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség felírható $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$ alakban (**4 pont**).
Az $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-(b-c)^2$ szorzat egyrészt pozitív, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt két pozitív tényező szorzata (**2 pont**), másrészt értéke legfeljebb a^2, ahol egyenlőség csak $b=c$ esetén áll fent (**2 pont**). Hasonlóképpen $(b+c-a)(b-c+a)\le b^2$ és $(c+a-b)(c-a+b)\le c^2$ (**2 pont**). E három egyenlőtlenséget összeszorozva a bizonyítandó állítás négyzetét kapjuk (**4 pont**). Mivel az eredeti egyenlőtlenségben mindkét oldal pozitív (**2 pont**), ezért azt is bebizonyítottuk. (Összesen **max. 16 pont**.)
Második megoldás: Vezessük be az $x=s-a$, $y=s-b$ és $z=s-c$ jelöléseket. Ekkor $c=x+y$, $b=x+z$ és $a=y+z$, vagyis a bizonyítandó egyenlőtlenség felírható $8xyz\le(x+y)(x+z)(y+z)$ alakban (**4 pont**). Ha a jobb oldalon elvégezzük a beszorzást, és mindkét oldalból levonunk $8xyz$ -t, a következő egyenlőtlenséghez jutunk:
$0\le x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y-6xyz$ (**4 pont**). Ennek jobb oldala $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2$ alakban is felírható (**4 pont**). A háromszög-egyenlőtlenség miatt (**2 pont**) *x*, *y* és *z* pozitívak, ezért ez a kifejezés mindig nemnegatív (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)
Megjegyzés: Egyenlőség csak $a=b=c$ (illetve $x=y=z$) esetén, vagyis csak a szabályos háromszögre áll fent.

10. osztály 10. feladat: Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvényt (**1 pont**). A feltétel alapján $ac+bc+c^2<0$, vagyis $c\cdot(a+b+c)<0$ (**1 pont**), azaz $f(0)\cdot f(1)<0$ (**4 pont**). Az utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy a függvény 0-ban és 1-ben ellentétes előjelű (**2 pont**), így a parabola 0 és 1 között metszi az *x*-tengelyt (**2 pont**), vagyis az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van (**2 pont**). Ezért az egyenlet diszkriminánsa pozitív (**2 pont**), vagyis $b^2-4ac>0$ (**1 pont**), amiből $4ac<b^2$ (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály 10. feladat: $f(x)=(x+6)^2-6$ (**2 pont**), így $f(f(x))=[f(x)+6]^2-6=\left[(x+6)^2-6+6\right]^2-6=$ $=(x+6)^4-6$ (**4 pont**). Hasonlóan $f(f(f(x)))=[f(x)+6]^4-6=\left[(x+6)^2-6+6\right]^4-6=(x+6)^8-6$ (**2 pont**). Ezt folytatva kapjuk, hogy $f(f(f(f(x))))=(x+6)^{16}-6$ (**1 pont**), $f(f(f(f(f(x)))))=(x+6)^{32}-6$ (**1 pont**) és $f(f(f(f(f(f(x))))))=(x+6)^{64}-6$ (**2 pont**). Vagyis az egyenletünk $(x+6)^{64}-6=0$ alakú (**1 pont**), ahonnan $(x+6)^{64}=6$, így $x+6=\pm\sqrt[64]{6}$, vagyis $x=-6\pm\sqrt[64]{6}$ (**3 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály 10. feladat: Az *MBPF* négyszög húrnégyszög (**1 pont**), mert *P* és *M* rajta van *BF* Thalész-körén (**2 pont**). Ekkor a kerületi szögek tétele miatt $BMP\measuredangle=BFP\measuredangle$ (**1 pont**), és mivel a *BPF* derékszögű háromszögben $FBP\measuredangle=\dfrac{CBA\measuredangle}{2}$, ezért $BMP\measuredangle=BFP\measuredangle=90°-\dfrac{CBA\measuredangle}{2}$ (**1 pont**). Hasonlóan az *MRDF* négyszög is húrnégyszög (**1 pont**), mert *M* és *R* rajta van *FD* Thalész-körén (**2 pont**), tehát $DMR\measuredangle=DFR\measuredangle$ (**1 pont**), és ezek egyenlők $90°-FDR\measuredangle$-gel (**1 pont**), illetve $90°-\dfrac{ADC\measuredangle}{2}=90°-\dfrac{CBA\measuredangle}{2}$-vel (**2 pont**). Vagyis $BMP\measuredangle=DMR\measuredangle$ (**2 pont**), és mivel a *B*, *M*, *D* pontok egy egyenesen vannak (**1 pont**), ezért a *P*, *M*, *R* pontok is (**1 pont**). (Az *M* pont biztosan a *PR* szakasz belső pontja, hiszen *P* és *R* a *BD* egyenes két ellentétes oldalára esik.) (Összesen **max. 16 pont**.)