BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2018. JANUÁR 5.

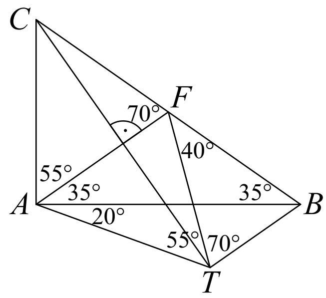
MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**B C E**	**B D**	1.	**B C D E**	**A C E**	1.
2.	**A B C D E**	**D**	2.	**D**	**A B C**	2.
3.	**A B C D E**	**A C E**	3.	**A B C**	**B D E**	3.
4.	**B C E**	**A D**	4.	**A D**	**A B C**	4.
5.	**B**	**B D**	5.	**B C D**	**C**	5.
6.	**B C D E**	**D E**	6.	**A B C D**	**B C D E**	6.
7.	**B**	**A D**	7.	**B C**	**B**	7.
8.	**A B D E**	**C E**	8.	**D**	**B C**	8.
9.	**B E**	**A B C D E**	9.	**B**	**A B C D E**	9.
10.	**B D**	**A B C**	10.	**B C D E**	**C E**	10.
11.	**A B D**	**A**	11.	**A B E**	**C**	11.
12.	**B C D E**	**B**	12.	**A B C**	**B D**	12.
13.	**D**	**B**	13.	**A B**	**B**	13.
Max.	*194+16 pont*	*183+16 pont*	*Max.*	*189+16 pont*	*187+16 pont*	*Max.*

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2018. JANUÁR 5.
JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

9. osztály:

A C csúcsnál lévő szög nagysága $180° - (90° + 35°) = 55°$ (**1 pont**). Az ABC háromszög egy téglalap fele, amelynek átlói egyenlő hosszúak, így az átlók fele is egyenlő hosszú, vagyis $FA = FB = FC$ (**2 pont**). Ekkor FAC és FAB is egyenlő szárú háromszög, amiből $CAF\measuredangle = 55°$ és $BAF\measuredangle = 35°$ (**1 pont**), illetve $AFC\measuredangle = 180° - (55° + 55°) = 70°$ következik (**1 pont**).



A tükrözésből következően $FAT\measuredangle = FAC\measuredangle$ (**2 pont**), tehát $FAT\measuredangle = 55°$, és így $BAT\measuredangle = FAT\measuredangle - FAB\measuredangle = 55° - 35° = 20°$ (**2 pont**), valamint $FT = FC$, és ezáltal $FT = FA = FB$ (**1 pont**). Az eddigiekből következik, hogy az FTA és FTB háromszögek is egyenlő szárúak, így $ATF\measuredangle = TAF\measuredangle = 55°$ (**1 pont**). $TFB\measuredangle = 180° - (TFA\measuredangle + AFC\measuredangle) = 180° - (70° + 70°) = 40°$ (**2 pont**), és így $FTB\measuredangle = (180° - TFB\measuredangle) : 2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$ (**1 pont**), ahonnan $ATB\measuredangle = ATF\measuredangle + FTB\measuredangle =$ $= 55° + 70° = 125°$ (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály:

Tekintsük a következő átalakításokat:

$\sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{13+4\sqrt{3}} = \sqrt{12+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1+1} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2} = 2\sqrt{3}+1$ (**5 pont**),

$\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}} = \sqrt{5-\left(2\sqrt{3}+1\right)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{3}-1$ (**5 pont**),

$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} = 2\sqrt{3+\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{2\left(3+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1\right)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) =$

$= \sqrt{6}+\sqrt{2}$ (**6 pont**).

Bármilyen más bizonyítás a fentivel arányosan pontozandó. (Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály:

A $\sqrt{x-9}$ kifejezés értelmezési tartománya miatt $x \ge 9$ (**4 pont**), így $\sqrt{x} \ge \sqrt{9} = 3$ (**2 pont**). Ugyanakkor $\sqrt{x+9} \ge \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ (**3 pont**), ezért $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} + \sqrt{x-9} \ge 3\sqrt{2} + 3 + 0 > 3\cdot 1{,}4 + 3 + 0 = 4{,}2 + 3 = 7{,}2 > 7$ (**4 pont**), tehát az egyenlet bal oldala soha nem lehet 7-tel egyenlő (**2 pont**). Vagyis az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály:

Az $\begin{cases} 1-y^2 = (1-x)^2 \\ 1-x^2 = \left(\sqrt{3}-y\right)^2 \end{cases}$ átalakítás alapján (**1 pont**) ábrázoljuk közös derékszögű koordinátarendszerben a két egyenletnek megfelelő ponthalmazokat (**1 pont**), amelyek mindegyike egy-egy kör (**1 pont**), egyenleteik pedig $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 = 1 \end{cases}$. (A négyzetre emelés ekvivalens voltához szükséges, hogy $x \le 1$ és $y \le \sqrt{3}$ legyen.)

Az első egyenletet teljesítő pontok a $K(1;\ 0)$ középpontú egységsugarú körvonal pontjai (**2 pont**), a második egyenletet teljesítő pontok pedig az $L\left(0;\ \sqrt{3}\right)$ középpontú egységsugarú körvonal pontjai (**2 pont**). Mivel $OK = 2$ és a két kör sugarainak összege is 2 (**2 pont**), ezért ez a két kör érinti egymást (**2 pont**), így egyetlen közös pontjuk, az érintési pont lesz az egyenletrendszer megoldása (**2 pont**), amely az $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pont (**3 pont**). (E pont koordinátái teljesítik az x, y-ra vonatkozó kikötéseket.)

Más helyes gondolatmenet a fentivel arányosan pontozandó. (Összesen **max. 16 pont**.)

Megjegyzés: Valamivel hosszabb úton érhetünk célba, ha az értelmezési tartomány ($|x| \le 1$, $|y| \le 1$) vizsgálata után bevezetjük az $x = \sin\alpha$ és $y = \sin\beta$ változócserét, majd az így kapott trigonometrikus egyenletrendszer megoldásait keressük.