BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2018. FEBRUÁR 24.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**C D E**	**C**	1.	**E**	**A B C**	1.
2.	**C E**	**D**	2.	**B D**	**C**	2.
3.	**A B C D E**	**A B C**	3.	**D**	**D**	3.
4.	**B D**	**E**	4.	**A B**	**B D**	4.
5.	**A B C D E**	**E**	5.	**C**	**B**	5.
6.	**E**	**A**	6.	**A E**	**B**	6.
7.	**A C D**	**E**	7.	**E**	**C D E**	7.
8.	**A C E**	**A**	8.	**A E**	**B C**	8.
9.	**B D**	**A B D E**	9.	**C**	**B**	9.
Max.	*134+16 pont*	*122+16 pont*	*Max.*	*121+16 pont*	*123+16 pont*	*Max.*

9. osztály 10. feladat: Jelölje a szakaszok hosszát *a*, *b*, *c*, *d* és *e*. Feltehetjük, hogy ezekre $0<a\le b\le c\le d\le e$ teljesül. Az állítást indirekt úton bizonyítjuk, vagyis tegyük fel, hogy az öt szakasz közül bármely háromból derékszögű vagy tompaszögű háromszög szerkeszthető (**2 pont**).
Ekkor a Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2\le c^2$, $b^2+c^2\le d^2$ és $c^2+d^2\le e^2$ igaz (**4 pont**). A háromszög-egyenlőtlenségből $e<a+b$, vagyis $e^2<a^2+2ab+b^2$ következik (**2 pont**). E négy egyenlőtlenséget összeadva a következőt kapjuk: $a^2+2b^2+2c^2+d^2+e^2<a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab$, innen $b^2+c^2<2ab$ (**4 pon**t). Mivel $b\le c$, ezért az utóbbi összefüggésből azt kapjuk, hogy $2b^2<2ab$, és így $b<a$ (**3 pont**). Ez ellentmondás, tehát a feltevésünk hamis volt, így a feladat állítása igaz (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály 10. feladat: A paralelepipedonok közül csak a kockának van beírt és körülírt gömbje is (**2 pont**).
Először megmutatjuk, hogy ha egy paralelepipedonnak van körülírt gömbje, akkor az téglatest. A körülírt gömböt a paralelepipedon egy oldallapjának síkja egy olyan körben metszi, amelyen rajta vannak az oldallap csúcsai (**2 pont**). Ezért az oldallapok körbe írható paralelogrammák (**2 pont**), vagyis téglalapok (**2 pont**), tehát a paralelepipedon valóban téglatest (**2 pont**).
Ha egy téglatestnek van beírt gömbje, akkor a szemközti lapjai közötti távolságok (amelyek a téglatest éleinek hosszai) a beírt gömb átmérőjével egyenlők (**4 pont**). Tehát a téglatest minden éle egyenlő hosszúságú, így a test kocka (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály 10. feladat: Jelölje az elkészítendő kocka élhosszúságát *n*, és számoljuk meg, hány egységkockát használunk fel a kirakásához. Az alap- és a fedőlapon összesen $2n^2$ kockát helyeztünk el, az elő- és a hátlapon $2n(n-2)$ darabot, a fennmaradó két oldallapon pedig $2(n-2)(n-2)$ darabot (**3 pont**). A felhasznált kiskockák száma legfeljebb 1000 lehet, vagyis: $2n^2+2n(n-2)+2(n-2)(n-2)\le 1000$ (**2 pont**). Ezt rendezve a $3n^2-6n-496\le 0$ másodfokú egyenlőtlenséget (**2 pont**) kapjuk, amelynek két különböző előjelű gyöke van (ez például a Viéte-formulákból látható). Tehát a pozitív gyök a legnagyobb érték, amelyre az egyenlőtlenség teljesül: $n=\dfrac{6+\sqrt{5988}}{6}$ (**3 pont**). Mivel a megoldás csak egész szám lehet, és $13<\dfrac{6+\sqrt{5988}}{6}<14$ (**2 pont**), ezért $n=13$. (**4 pont**) (Ekkor 866 kiskockát használunk fel, a kocka térfogata pedig $V=n^3=2197$ térfogategység.) (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály 10. feladat: Töltsük ki a táblázat első oszlopát alulról felfelé: ha a sorozat különbségét *d*-vel jelöljük, akkor az elemek $0, d, 2d, 3d, 4d$ (**1 pont**). Jelöljük a második sor harmadik elemét *x*-szel. Ekkor a második sor első három elemére teljesül a $74=\dfrac{3d+x}{2}$ összefüggés, ahonnan $x=148-3d$ (**3 pont**), ez áll tehát a második sor harmadik oszlopában. A harmadik oszlop harmadik eleme (a fölötte és az alatta lévő elem alapján) $\dfrac{148-3d+103}{2}=\dfrac{251-3d}{2}$ (**4 pont**), amely felírható a harmadik sor első és utolsó elemének számtani közepeként is: $\dfrac{251-3d}{2}=\dfrac{2d+186}{2}$ (**3 pont**), ahonnan $d=13$ (**2 pont**). Ez alapján elkezdhetjük a táblázat számokkal való kitöltését. Az alábbi táblázatba csak azokat a számokat írtuk be, amelyek szükségesek voltak a *-gal jelölt mező meghatározásához. A *-gal jelölt helyre a 142 kerül (**3 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

52			***142**	
39	74	109	144	
26		106	146	186
13		103		
0				