BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2017. JANUÁR 6.

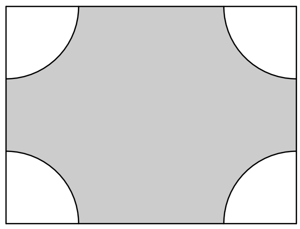
MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**D**	**D**	1.	**A B C D**	**A C E**	1.
2.	**A C E**	**B E**	2.	**A B C D**	**A B C D E**	2.
3.	**A E**	**A B C D**	3.	**C**	**C D E**	3.
4.	**A B C E**	**C D E**	4.	**B C D E**	**C D**	4.
5.	**A B D**	**B D**	5.	**A B D**	**A B C**	5.
6.	**B**	**C D**	6.	**B D E**	**A B C D**	6.
7.	**D E**	**C D**	7.	**A C E**	**A E**	7.
8.	**C**	**A B D**	8.	**A B C**	**B E**	8.
9.	**E**	**A B C D**	9.	**D**	**A B**	9.
10.	**D**	**C E**	10.	**C D E**	**C D E**	10.
11.	**A B C**	**D**	11.	**A B C**	**C D E**	11.
12.	**A**	**C D E**	12.	**D**	**A B C D E**	12.
13.	**C D E**	**D E**	13.	**C**	**D E**	13.
Max.	*182+16 pont*	*187+16 pont*	*Max.*	*190+16 pont*	*195+16 pont*	*Max.*

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2017. JANUÁR 6.

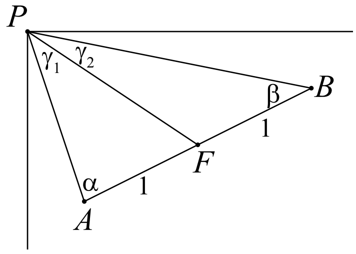
JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

9. osztály: Az összekarcolt részt úgy kapjuk meg, hogy a téglalap alakú plató négy sarkából egy-egy 1 m sugarú körvonalat rajzolunk, majd elhagyjuk a téglalapból a körívek által határolt negyedköröket. Az így kapott (az ábrán szürkítéssel jelölt) terület minden pontja (a határvonalaival együtt) összekarcolható.



A szürkített terület minden pontjához található a faágnak olyan állása, amikor a szög éppen az adott pontban található: A negyedkörívek pontjait úgy kaphatjuk meg, hogy a faág egyik végét a megfelelő sarokba helyezzük, majd az ágat a kívánt állásba forgatjuk. A téglalap határára eső pontokat úgy kaphatjuk meg, hogy a faágat teljes hosszában a téglalap megfelelő oldalára helyezzük. A szürke rész belső pontjait pedig megkaphatjuk például úgy, hogy az adott pontot összekötjük a téglalap legközelebbi csúcsával (ha több ilyen is van, akkor bármelyikkel), majd a kapott egyenesre helyezzük a faágat úgy, hogy a közepe az adott pont legyen. (Valójában a határpontokat is megkaphatjuk így.)

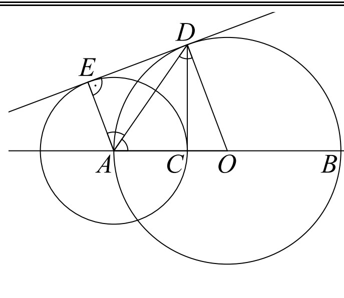
A negyedkörlapok körívtől különböző pontjaihoz nem található a faágnak ilyen állása. Ha ugyanis a faág közepét egy ilyen F pontba helyezzük, akkor a faág végeit A-val és B-vel, a körív középpontját (a téglalap csúcsát) P-vel jelölve a mellékelt ábra elrendezését kapjuk. Tudjuk, hogy egy háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található. Így mivel $AF = 1 > PF$, ezért az AFP háromszögben (az ábra jelöléseit használva) $\gamma_1 > \alpha$. Hasonlóképpen a BFP háromszögben $BF = 1 > PF$, ezért $\gamma_2 > \beta$. A két egyenlőtlenséget összeadva $\gamma_1 + \gamma_2 > \alpha + \beta$. De mivel az ABP háromszögben $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$, ezért ebből $\gamma_1 + \gamma_2 > 90°$ következne, ami lehetetlen, ha A és B az ábrának megfelelően az eredeti téglalap belsejében található.



Pontozás (összesen **max. 16 pont**):

– **3 pontot** ér az összekarcolható terület pontos meghatározása, ez a pontszám nem bontható.
– **3 pontot** ér a helyes ábra, ez a pontszám nem bontható.
– **4 pontot** ér annak indoklása, hogy a szürkített terület minden pontja összekarcolható, ez a pontszám arányosan bontható.
– **6 pontot** ér annak indoklása, hogy a negyedkörlapok körívtől különböző pontjai nem karcolhatók össze, ez a pontszám arányosan bontható.

10. osztály: Legyen a D-n áthaladó érintő és a második kör közös pontja E, az első kör középpontja pedig O. Az AOD háromszög egyenlő szárú (OD és OA sugarak ugyanabban a körben) (**1 pont**), ezért $ODA\measuredangle = OAD\measuredangle$ (**2 pont**). Mivel $OD \parallel AE$ (**2 pont**), így $DAE\measuredangle = ODA\measuredangle = OAD\measuredangle$ (**2 pont**). Ebből következik, hogy a DEA és DCA háromszögek egybevágók (**3 pont**), hiszen megegyezik két oldaluk ($EA = AC$ sugarak, DA közös) és a közbezárt szögük: $DAE\measuredangle = DAO\measuredangle$ (**3 pont**). Ez azt jelenti, hogy $DCA\measuredangle = DEA\measuredangle = 90°$ (**2 pont**), és így DC merőleges AB-re (**1 pont**). Bármilyen más helyes bizonyítást a leírtakkal arányosan kell pontozni (összesen **max. 16 pont**).

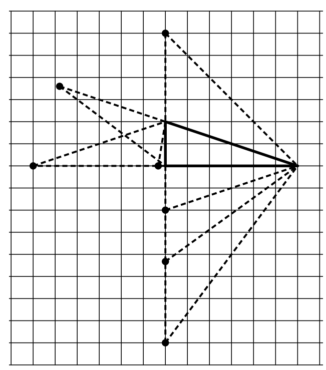


11. osztály: Az ábrán látható 7 különböző lehetőség létezik.

Pontozás:

1 jó lehetőség: **1 pont**
2 jó lehetőség: **3 pont**
3 jó lehetőség: **5 pont**
4 jó lehetőség: **7 pont**
5 jó lehetőség: **10 pont**
6 jó lehetőség: **13 pont**
7 jó lehetőség: **16 pont**

(Összesen **max. 16 pont**.)



12. osztály: Indirekt úton bizonyítunk (**2 pont**). Mivel $10 > 1$, ezért $\log_5 10 > 0$ (**2 pont**). Tegyük fel tehát, hogy léteznek olyan p és q pozitív egész számok, amelyekre $\log_5 10 = \frac{p}{q}$ (**2 pont**). Azonban $\log_5 10 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow q \cdot \log_5 10 = p \Leftrightarrow 5^p = 10^q$ (**4 pont**). Ez utóbbi egyenlőség viszont nem lehet igaz, mivel 5^p utolsó számjegye 5, de 10^q utolsó számjegye 0 (**2 pont**). Ellentmondásra jutottunk, így feltevésünk hibás volt (**2 pont**). Vagyis nem léteznek olyan p és q pozitív egész számok, amelyekre $\log_5 10 = \frac{p}{q}$, így $\log_5 10$ nem racionális szám (**2 pont**).

Más helyes gondolatmenet a fentiekkel arányosan pontozandó (összesen **max. 16 pont**).