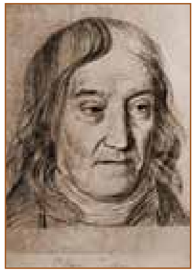
„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába."

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®



BOLYAI FARKAS

2016/17.

ORSZÁGOS DÖNTŐ

11. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS, a Magyar Tudományos Akadémia alelnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
TASSY GERGELY középiskolai tanár

A feladatsorok lektorálója:
TASSYNÉ BERTA ANDREA középiskolai tanár

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

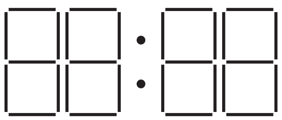
http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

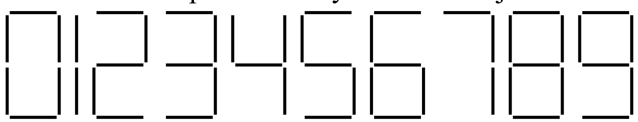
Az 1-9. feladatok megoldását a válaszlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. Adott az 123456789 szám. Egy lépés során kiválasztunk két egymás melletti számjegyet, amelyek egyike sem 0, mindkettőt csökkentjük 1-gyel, és felcseréljük a helyüket. Legkevesebb hány ilyen lépés után kaphatjuk meg az így elérhető legkisebb 9-jegyű számot?

(A) *10* **(B)** *14* **(C)** *18* **(D)** *20* **(E)** *22*

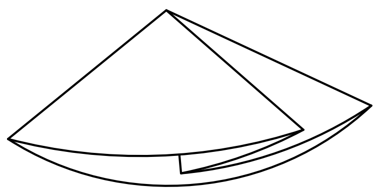
2. Egy óriáskijelzős, órákat és perceket kijelző digitális óra 28 pálcikája közül néhány meghibásodott (a hibás pálcikák nem világítanak). Összesen hány pálcika meghibásodásakor fordulhat elő, hogy a hiba ellenére minden időpontban egyértelműen megállapítható az óra által jelzett idő? (Az óra 0:00-tól 23:59-ig mutatja az időt, a számjegyek alakja a lenti ábrán látható. A hibás pálcikák helyét nem ismerjük előzetesen.)

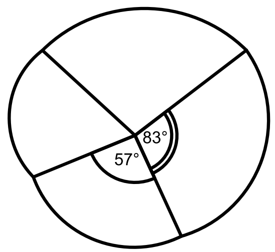




(A) *7* **(B)** *10* **(C)** *13* **(D)** *16* **(E)** *19*

3. Egy papírdarabot az egyik pontján átmenő négy félegyenes mentén összehajtogattak (a bal oldali ábra szerint), majd egy síkba összenyomták. Utána kihajtogatták és kiemelték a hajtások vonalait (lásd a jobb oldali ábrán). Így négy közös csúcsú szöget kaptak, amelyek közül az egyik nagysága 57°, egy e mellett lévőé pedig 83°. Hány fokos lehet a hiányzó két szög valamelyike?





(A) *97* **(B)** *117* **(C)** *123* **(D)** *143* **(E)** *Az előzőek közül egyik sem.*

4. Milyen számjegy áll az $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2016}{2017!}$ összeg tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2017. helyen? (Az $n!$ a pozitív egész számok szorzatát jelenti 1-től n-ig.)

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *9*

5. Az 1, 2, 3, 4, …, 99, 100 számok közül bárhogyan törlünk tízet, a megmaradó számok közül biztosan kiválasztható egy számtani sorozat x szomszédos tagja. Az alábbiak közül mennyi lehet x értéke?

(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

6. Adott egy 16 oldalú konvex sokszög, amelyben nincs három olyan átló, amelyek egy pontban találkoznának. Összesen hány metszéspontja van e sokszög átlóinak a sokszög belsejében?

(A) *1600-nál kevesebb* **(B)** *1600-nál több* **(C)** *2016-nál kevesebb*
(D) *2016-nál több* **(E)** *5356*

7. Adott az $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 98!\cdot 99!\cdot 100!$ szorzat. Az alábbiak közül melyik válaszlehetőségre igaz, hogy ha elhagyjuk a szorzatból a felsorolt tényező(ke)t (és az összes többi tényezőt meghagyjuk), akkor a megmaradó szorzat eredménye négyzetszám lesz?

(A) $1!$ **(B)** $3!\cdot 4!$ **(C)** $48!\cdot 49!\cdot 50!$ **(D)** $50!$ **(E)** $99!\cdot 100!$

8. Legyen M az $ABCD$ négyzet valamely belső pontja, továbbá P, Q, R és S rendre az MAB, MBC, MCD és MDA háromszögek súlypontja. Az alábbiak közül mennyi lehet a $PQRS$ négyszög és az $ABCD$ négyzet területének aránya?

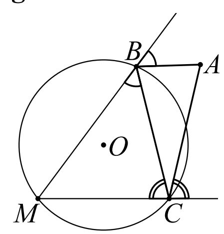
(A) $\frac{1}{5}$*-nél kevesebb* **(B)** $\frac{1}{5}$*-nél több* **(C)** $\frac{1}{4}$*-nél kevesebb*
(D) $\frac{1}{4}$*-nél több* **(E)** $\frac{1}{3}$*-nál több*

9. Zsolt egy olyan háromjegyű számot írt a füzetébe, amely egyenlő számjegyei négyzetösszegének 11-szeresével. Az alábbiak közül melyik számjegy fordulhatott elő a Zsolt által leírt számban?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *8*

A következő feladatot a válaszlap kijelölt helyén oldjátok meg!

10. Az M csúcsú szög belső tartományában kijelöltünk egy A pontot. Ebből az A pontból elindítottak egy golyót, amely ütközött a szög egyik szárával annak B pontjában, onnan visszapattant, ütközött a szög másik szárával annak C pontjában, majd visszajutott az A pontba. (A „beesési” szög megegyezik a „visszaverődési” szöggel, lásd az ábrát.)



Bizonyítsátok be, hogy a BCM háromszög köré írt kör O középpontja illeszkedik az MA egyenesre!