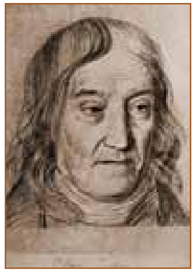
„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába."

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®



BOLYAI FARKAS

2015/16.

KÖRZETI FORDULÓ

12. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS, a Magyar Tudományos Akadémia alelnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
TASSY GERGELY középiskolai tanár

A feladatsorok lektorálója:
TASSYNÉ BERTA ANDREA középiskolai tanár

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

Az 1-13. feladatok megoldását a válaszlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. Összesen hány különböző egyenes húzható egy kocka nyolc csúcsán át úgy, hogy minden egyenes 2 csúcsot tartalmazzon?

(A) *12* **(B)** *22* **(C)** *28* **(D)** *32* **(E)** *56*

2. Összesen hány x természetes számra teljesül a $3^{2015} \le x \le 3^{2016}$ egyenlőtlenség?

(A) 2015 **(B)** 3^{2015} **(C)** $3^{2015}+1$ **(D)** $2\cdot 3^{2015}$ **(E)** $2\cdot 3^{2015}+1$

3. Az O középpontú, r sugarú körbe beírtuk az A_1, A_2, A_3, ..., A_{100} csúcspontokkal rendelkező szabályos sokszöget. M egy olyan pont a sokszög síkján kívül, amelyre $OM = r$. Az alábbiak közül hány fokos lehet az $A_{12}MA_{62}$ szög?

(A) *15* **(B)** *30* **(C)** *60* **(D)** *90* **(E)** *120*

4. Száz egész szám közül mindig kiválasztható néhány (egy vagy több) úgy, hogy ezek összege biztosan osztható

(A) *96-tal* **(B)** *98-cal* **(C)** *100-zal* **(D)** *103-mal* **(E)** *111-gyel*

5. Összesen hány valós megoldása lehet a $\left|\left||2x-1|-2\right|-1\right| = p$ egyenletnek, ha p valós paraméter?

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *8*

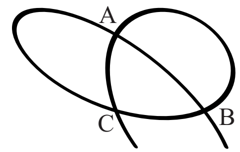
6. Az f függvény eleget tesz az $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$ függvényegyenletnek minden valós x, y számpárra, továbbá $f(1)=1$ teljesül. Összesen hány 1-től különböző n egész szám esetén lehet igaz az $f(n)=n$ összefüggés?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *4* **(E)** *végtelen sok*

7. Mennyi az $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2017}$ összeadás eredménye?

(A) *1-nél kevesebb* **(B)** $\frac{504}{2017}$ **(C)** $\frac{2013}{2017}$ **(D)** $\frac{2016}{2017}$ **(E)** *1-nél több*

8. Egy darab madzag fekszik a padlón az ábrán látható helyzetben. Túl messze van ahhoz, hogy láthassuk, hogyan kereszteződik az A, B és C pontokban. (De azt tudjuk, hogy mindhárom pontban ugyanakkora eséllyel van felül az egyik, illetve a másik madzagrész, és nincs visszakanyarodás.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy csomó keletkezik a madzagon, ha a két végén széthúzzuk?



(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$*-nél több* **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{3}$*-nál több* **(E)** $\frac{1}{2}$

9. Legyen $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ az 1, 2, 3, …, 2015 számok egy tetszés szerinti sorrendje. Ekkor az $(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot(a_3-3)\cdot\ldots\cdot(a_{2015}-2015)$ szorzat…

(A) *lehet páros* **(B)** *lehet páratlan* **(C)** *biztosan páros*
(D) *biztosan páratlan* **(E)** *lehet negatív*

10. Megmérték egy vízszintes terepen álló torony emelkedési szögét a talppontjától 100 m, 200 m és 300 m távolságból. Hány méter magas lehet ez a torony, ha a három emelkedési szög összege 90°?

(A) *50* **(B)** *100* **(C)** *150* **(D)** *150-nél kevesebb* **(E)** *150-nél több*

11. Egy paralelogramma oldalai fölé kifelé négyzeteket emelünk, a négyzetek középpontjai legyenek A, B, C és D. Ekkor az $ABCD$ négyszög

(A) *lehet paralelogramma* **(B)** *biztosan paralelogramma* **(C)** *lehet rombusz*
(D) *lehet négyzet* **(E)** *biztosan négyzet*

12. Egy különböző természetes számokból álló végtelen számtani sorozatnak nem lehet minden tagja…

(A) *páros* **(B)** *páratlan* **(C)** *legfeljebb tízjegyű*
(D) *összetett szám* **(E)** *prímszám*

13. Jelölje O egy 0,5 cm sugarú gömb középpontját, P_1, P_2, P_3 pedig a tér olyan pontjait, amelyekre $OP_1 = 1$ cm, $OP_2 = 2$ cm és $OP_3 = 3$ cm. Tekintsük a P_1, P_2, illetve P_3 középpontok körüli P_1O, P_2O, illetve P_3O sugarú gömbök felületének az O középpontú gömb belsejébe eső részeit, jelölje ezen részek felszínét rendre F_1, F_2 és F_3. Az alábbiak közül melyik állítás lehet igaz? (Egy r sugarú gömb h magasságú gömbsüvegének felszíne $2r\pi\cdot h$.)

(A) $F_1 < F_2$ **(B)** $F_2 < F_3$ **(C)** $F_1 = F_3$ **(D)** $F_1 > F_2$ **(E)** $F_2 > F_3$

A következő feladatot a válaszlap kijelölt helyén oldjátok meg!

14. Az $x^2+ax+b+1=0$ egyenlet gyökei pozitív egész számok. Bizonyítsátok be, hogy ekkor a^2+b^2 összetett szám!